Mecánica – ICT

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (12 de julio del 2014)

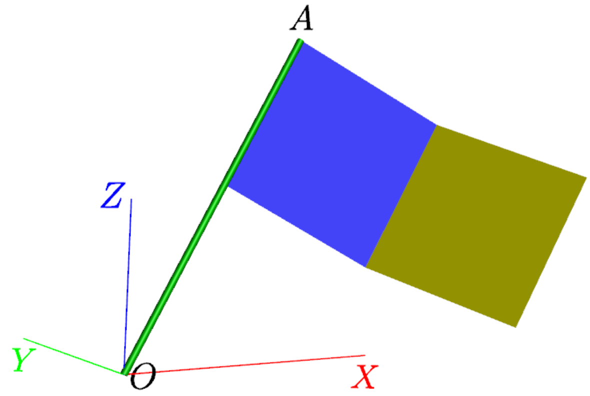
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

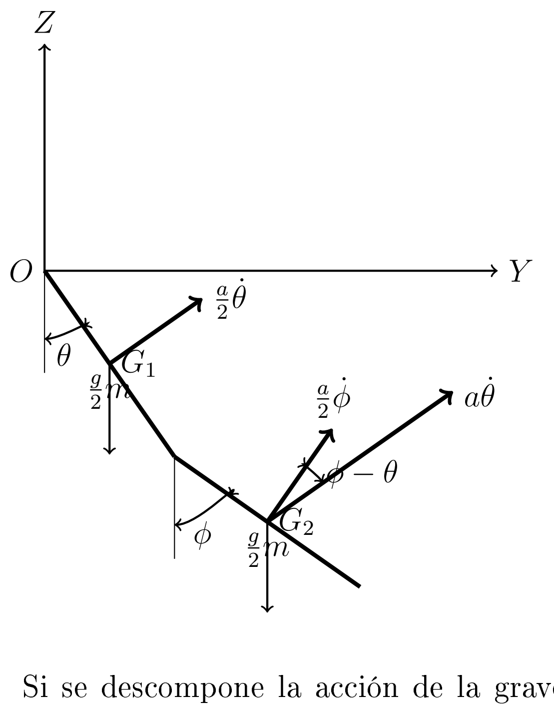
Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Dos placas cuadradas pesadas de lado a y masa m están articuladas entre sí por uno de sus lados. Una de ellas, por el lado opuesto al lado común, está articulada a una recta fija OA, manteniéndose el punto más bajo de la articulación a una distancia b del origen. La recta fija OA está situada en el plano OXZ e inclinada $\frac{\pi}{3}$ respecto del eje OX. La gravedad actúa según el eje OZ negativo.

Para el sistema así definido, se pide:

1. Integrales primeras.
2. Ecuaciones del movimiento.
3. Linealización de las ecuaciones de segundo orden alrededor de la posición de equilibrio.
4. Frecuencias propias.





1.- Si se descompone la acción de la gravedad como una fuerza en la dirección de la recta y otra perpendicular a la misma, la fuerza que actúa según la recta no tiene ningún efecto sobre el movimiento, y el movimiento del sistema es equivalente a uno con una gravedad $g \cos \frac{\pi}{3}$ actuando según la normal a la recta OA.

Desde este punto de vista el problema es equivalente a un péndulo doble formado por dos varillas de longitud a y masa m con una gravedad $\frac{g}{2}$. Consideraremos un nuevo sistema de coordenadas con el origen de coordenadas en el punto de la recta situado a la distancia b de O girado $-\frac{\pi}{3}$ alrededor del eje Y original (sistema utilizado en la figura esquemática).

Los grados de libertad serán la inclinación de las "varillas" respecto de la "vertical", θ para la primera varilla (la que está con un extremo fijo) y ϕ para la segunda.

El potencial gravitatorio de las placas es:

$$V_1 = -\frac{a\,g\,m\,\cos\vartheta}{4}$$

y

$$V_2 = -\frac{2\,a\,g\,m\,\cos\vartheta + a\,g\,m\,\cos\varphi}{4}$$

Queda como potencial del sistema:

$$V = -\frac{3\,a\,g\,m\,\cos\vartheta + a\,g\,m\,\cos\varphi}{4}$$

Para la energía cinética tendremos en cuenta la energía cinética de la primera varilla como giro plano alrededor de un eje fijo. Utilizando el momento de inercia respecto de un extremo de la varilla $\frac{1}{3}ma^2$ quedaría:

$$T_1 = \frac{a^2\,m\,\dot{\vartheta}^2}{6}$$

Para la segunda varilla descomponemos la energía en energía cinética de rotación y de traslación.

La energía cinética de rotación (al ser un movimiento plano) se corresponde con el giro alrededor del centro de masas de la varilla considerando como momento de inercia $\frac{1}{12}ma^2$.

$$T_{r2} = \frac{a^2\,m\,\dot{\varphi}^2}{24}$$

y para la energía cinética de traslación consideramos la composición de las velocidades (indicadas en la figura) mediante el teorema del coseno.

$$\boldsymbol{v}_{G_2}^2 = \frac{4\,a^2\,\dot{\vartheta}^2 + 4\,a^2\,\cos(\vartheta-\varphi)\,\dot{\varphi}\,\dot{\vartheta} + a^2\,\dot{\varphi}^2}{4}$$

De ahí se obtiene la energía cinética de traslación:

$$T_{t2} = \frac{4\,a^2\,m\,\dot{\vartheta}^2 + 4\,a^2\,m\,\cos(\vartheta-\varphi)\,\dot{\varphi}\,\dot{\vartheta} + a^2\,m\,\dot{\varphi}^2}{8}$$

y la energía cinética total (sumando $T_1 + T_{t2} + T_{r2}$):

$$T = \frac{4\,a^2\,m\,\dot{\vartheta}^2 + 3\,a^2\,m\,\cos(\vartheta-\varphi)\,\dot{\varphi}\,\dot{\vartheta} + a^2\,m\,\dot{\varphi}^2}{6}$$

Al derivar las fuerzas que actúan de un potencial tendremos la energía como integral primera.

$$E = T + V$$

que coincidirá con la integral de jacobi.

$$h = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

$$E = \frac{8\,a^2\,m\,\dot{\vartheta}^2 + 6\,a^2\,m\,\cos\left(\vartheta - \varphi\right)\,\dot{\varphi}\,\dot{\vartheta} + 2\,a^2\,m\,\dot{\varphi}^2 - 9\,a\,g\,m\,\cos\vartheta - 3\,a\,g\,m\,\cos\varphi}{12}$$

2.- Para obtener las ecuaciones del movimiento podemos utilizar el formulismo lagrangiano. Obtenemos la función lagrangiana:

$$L = T - V$$

$$L = \frac{8\,a^2\,m\,\dot{\vartheta}^2 + 6\,a^2\,m\,\cos\left(\vartheta - \varphi\right)\,\dot{\varphi}\,\dot{\vartheta} + 2\,a^2\,m\,\dot{\varphi}^2 + 9\,a\,g\,m\,\cos\vartheta + 3\,a\,g\,m\,\cos\varphi}{12}$$

y de ahí mediante las ecuaciones de lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

obtenemos:

$$\frac{16\,a^2\,m\,\ddot{\vartheta} + 6\,a^2\,m\,\cos\left(\vartheta - \varphi\right)\,\ddot{\varphi} + 6\,a^2\,m\,\sin\left(\vartheta - \varphi\right)\,\dot{\varphi}^2 + 9\,a\,g\,m\,\sin\vartheta}{12} = 0$$

$$\frac{6\,a^2\,m\,\cos\left(\vartheta - \varphi\right)\,\ddot{\vartheta} - 6\,a^2\,m\,\sin\left(\vartheta - \varphi\right)\,\dot{\vartheta}^2 + 4\,a^2\,m\,\ddot{\varphi} + 3\,a\,g\,m\,\sin\varphi}{12} = 0$$

3.- Para linealizar las ecuaciones conviene hacerlo con valores cero de las coordenadas en la posición de equilibrio (es el caso).

Aproximamos:

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &\approx \theta \\
\sin(\phi) &\approx \phi \\
\cos(\theta) &\approx 1 \\
\cos(\phi) &\approx 1
\end{aligned}$$

y despreciamos los términos de orden cuadrático o superior en las coordenadas o velocidades con lo que se obtiene:

$$\frac{16\,a^2\,m\,\ddot{\vartheta} + 9\,a\,g\,m\,\vartheta + 6\,a^2\,m\,\ddot{\varphi}}{12} = 0$$

$$\frac{6\,a^2\,m\,\ddot{\vartheta} + 4\,a^2\,m\,\ddot{\varphi} + 3\,a\,g\,m\,\varphi}{12} = 0$$

4.- A partir de las ecuaciones linealizadas usando los coeficientes de las coordenadas se obtiene la matriz de rigidez:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{3\,a\,g\,m}{4} & 0 \\ 0 & \frac{a\,g\,m}{4} \end{pmatrix}$$

y a partir de los coeficientes de las aceleraciones generalizadas se obtiene la matriz de masas:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4\,a^2\,m}{3} & \frac{a^2\,m}{2} \\ \frac{a^2\,m}{2} & \frac{a^2\,m}{3} \end{pmatrix}$$

Las frecuencias propias se obtienen resolviendo el problema de autovalores

$$\left| K - \omega^2 M \right| = 0$$

resultando como frecuencias propias:

$$\left[\frac{\sqrt{21 - 6\,\sqrt{7}}\,\sqrt{\frac{g}{a}}}{\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{6\,\sqrt{7} + 21}\,\sqrt{\frac{g}{a}}}{\sqrt{14}} \right]$$