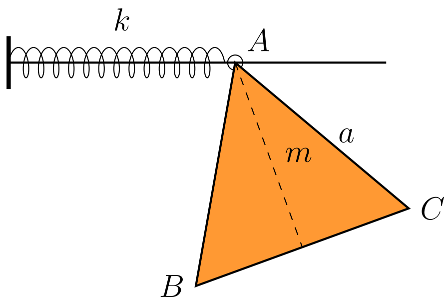
Mecánica – ICT

EXAMEN FINAL (16 de junio del 2014)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

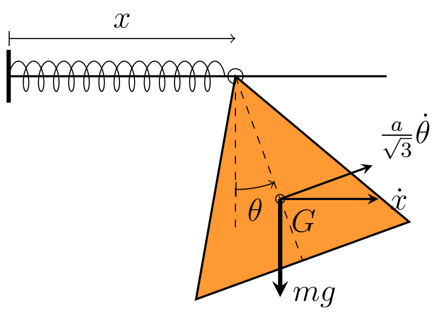
Se considera el sistema plano de la figura, formado por una placa triangular equilátera ABC pesada, de masa m y lado a, cuyo vértice A está obligado a permanecer en una recta horizontal lisa. El punto A está además unido mediante un muelle lineal de constante k a un punto fijo de dicha recta. Se pide



1. Obtener las ecuaciones de la dinámica linealizadas para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
2. Considerando $k = 2\sqrt{3}\, mg/a$, calcular las frecuencias propias y los modos normales de vibración.
3. En el supuesto de que exista una fuerza horizontal aplicada en el centro de masas de la placa $f(t) = f_0 \operatorname{sen}(\Omega t)$, obtener las ecuaciones desacopladas de la dinámica en función de las coordenadas normales (amplitudes de cada modo de vibración).

---

§1. El sistema tiene dos grados de libertad, que se pueden definir mediante las coordenadas (x, θ) de la figura adjunta, midiéndose la distancia x desde la posición natural del muelle. Se comprueba fácilmente que la posición de equilibrio estable es $(x, \theta) = (0, 0)$. La expresión de la energía cinética es



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\dot{\theta}\right)^2 + 2\dot{x}\frac{a}{\sqrt{3}}\dot{\theta}\cos\theta \right] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m a^2\right)\dot{\theta}^2 \end{aligned} \tag{1}$$

(El momento de inercia I_G se puede obtener a partir del momento de inercia respecto a uno de los lados $mh^2/6$, aplicando el Th. de Steiner y otros cálculos geométricos elementales, resultando $I_G = ma^2/12$.)

Por su parte la expresión de la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2} k x^2 + m g z_G = \frac{1}{2} k x^2 - m g \frac{a}{\sqrt{3}} \cos\theta \,. \tag{2}$$

Las ecuaciones linealizadas se pueden obtener mediante los coeficientes de masa y de rigidez, derivando respectivamente la energía cinética y la potencial:

$$m_{ij} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{M}] = [m_{ij}] = \begin{pmatrix} m & \frac{1}{\sqrt{3}} m a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} m a & \frac{5}{12} m a^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$k_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{K}] = [k_{ij}] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} m g a \end{pmatrix} \tag{4}$$

De esta forma, las ecuaciones linealizadas de la dinámica para pequeñas oscilaciones resultan

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}ma\ddot{\theta}+kx=0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}ma\ddot{x}+\frac{5}{12}ma^2\ddot{\theta}+\frac{1}{\sqrt{3}}mga\theta=0 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\}+[\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\}=\{\mathbf{0}\}\,. \tag{5}$$

§2. Las frecuencias propias salen de las soluciones de la ecuación característica:

$$\det([\mathbf{K}]-\lambda[\mathbf{M}])=\frac{1}{12}m^2(a^2\lambda^2-14\sqrt{3}\,ag\lambda+24g^2)=0 \tag{6}$$

resultando

$$\lambda_{1,2}=\sqrt{3}(7\mp\sqrt{41})\frac{g}{a} \quad \Rightarrow \quad \omega_{1,2}=\sqrt{\sqrt{3}(7\mp\sqrt{41})\frac{g}{a}}=\begin{cases}1{,}0168\sqrt{\frac{g}{a}}\\ 4{,}8182\sqrt{\frac{g}{a}}\end{cases} \tag{7}$$

Los modos normales se obtienen como los vectores propios del problema de autovalores asociados a cada una de las soluciones,

$$([\mathbf{K}]-\lambda_{1,2}[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}_{1,2}\}=\{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\{\mathbf{a}_1\}=\begin{Bmatrix}1\\ \frac{\sqrt{3}}{4a}(\sqrt{41}+3)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ \frac{4{,}0717}{a}\end{Bmatrix}, \\ \{\mathbf{a}_2\}=\begin{Bmatrix}1\\ -\frac{\sqrt{3}}{4a}(\sqrt{41}-3)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ -\frac{1{,}4736}{a}\end{Bmatrix}.\end{cases} \tag{8}$$

§3. En primer lugar evaluemos las fuerzas generalizadas que corresponden a la fuerza citada, a través de la expresión del trabajo virtual:

$$\delta W_f=f(t)\big(\delta x+\frac{a}{\sqrt{3}}\cos\theta\,\delta\theta\big) \quad \Rightarrow \quad Q_x=f_0\,\mathrm{sen}(\Omega t)\,, \quad Q_\theta=f_0\,\mathrm{sen}(\Omega t)\frac{a}{\sqrt{3}}\cos\theta\,. \tag{9}$$

Al particularizar para pequeñas oscilaciones respecto a la posición de equilibrio ($\theta=0$) resulta el vector de fuerzas a agregar a la derecha de la ecuación matricial (5)

$$\{\mathbf{f}\}=\begin{Bmatrix}1\\ \frac{a}{\sqrt{3}}\end{Bmatrix}f_0\,\mathrm{sen}(\Omega t)\,. \tag{10}$$

Las ecuaciones de la dinámica modales desacopladas se expresan genéricamente en función de las coordenadas normales u_k (amplitudes de los modos de vibración) como:

$$\ddot{u}_k+\omega_k^2u_k=\frac{1}{M_k}\eta_k(t) \quad (k \text{ no sumado})\,, \tag{11}$$

donde M_k son las masas modales y η_k las fuerzas modales, cuya expresión general es

$$M_k=\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}, \quad \eta_k=\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{f}\}\,. \tag{12}$$

Desarrollando los cálculos se obtiene:

$$M_1=\frac{41-5\sqrt{41}}{2(7-\sqrt{41})^2}\,m=12{,}609\,m\,, \quad \eta_1=\frac{2}{7-\sqrt{41}}\,f(t)=3{,}3508\,f_0\,\mathrm{sen}(\Omega t)\,, \tag{13}$$

$$M_2=\frac{41+5\sqrt{41}}{2(7+\sqrt{41})^2}\,m=0{,}20322\,m\,, \quad \eta_2=\frac{2}{7+\sqrt{41}}\,f(t)=0{,}14922\,f_0\,\mathrm{sen}(\Omega t)\,. \tag{14}$$