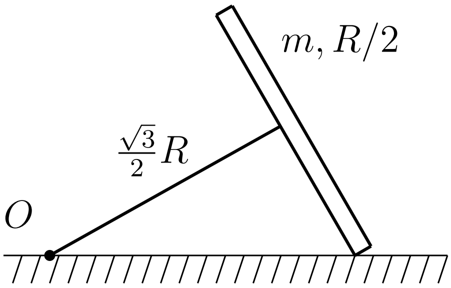
Mecánica-ICT

EXAMEN FINAL (16 de junio de 2014)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un sólido pesado está formado por una varilla de longitud $\sqrt{3}R/2$ sin masa, soldada perpendicularmente por un extremo al centro de un disco de masa m y radio $R/2$. Este sólido se mueve de manera que el extremo O de la varilla está fijo y el disco rueda sin deslizar sobre un plano horizontal fijo y liso (en la figura se muestra una sección principal del sólido sobre el plano). Para la solución se considerará que la velocidad angular es la suma de una componente $\dot{\psi}$ en dirección vertical y otra componente $\dot{\varphi}$ en dirección del eje de revolución del sólido.



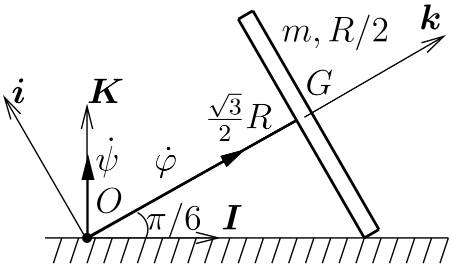
Se pide:

1. Expresión de la velocidad angular del sólido en función de $\dot{\psi}$.
2. Expresión del momento cinético en O. Demostrar que las dos componentes de la velocidad angular indicadas anteriormente tienen valor constante, indicando dicho valor si en el instante inicial $\dot{\psi} = \omega_0$.
3. Calcular las reacciones en el punto fijo O y en el punto de contacto del disco con el plano horizontal.
4. Calcular el valor de ω_0 estrictamente necesario para que el disco se despegue del plano horizontal.

---

1. Sea $\boldsymbol{K}$ al versor de dirección vertical, y un triedro intermedio con origen en O, y tal que $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección del eje de revolución del sólido, e $\boldsymbol{i}$ la dirección de máxima pendiente del plano del disco. La expresión de la velocidad angular con las componentes indicadas en el enunciado es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{1}$$



Como el disco rueda sin deslizar, la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ es horizontal debiendo verificarse:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\dot{\psi}}{\operatorname{sen}(\pi/6)} = -2\dot{\psi} \tag{2}$$

En consecuencia, la expresión de la velocidad angular resulta:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}(\cos(\pi/6)\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}(\pi/6)\boldsymbol{k}) + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} = \dot{\psi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{3}{2}\boldsymbol{k}\right) \tag{3}$$

2. El tensor de inercia en O, expresando sus componentes en el triedro intermedio, es:

$$\boldsymbol{I}_O = \begin{pmatrix} \frac{13}{16}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{16}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}mR^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

La expresión del momento cinético en O es:

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \boldsymbol{\Omega} = \frac{mR^2\dot{\psi}}{16}\left(\frac{13\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{k}\right) \tag{5}$$

Dado que todas la fuerzas aplicadas sobre el sólido cortan al mismo en su eje de revolución, la proyección del momento cinético en O sobre dicho eje es constante:

$$\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{k} = \text{cte} \;\Rightarrow\; \dot{\psi} = \omega_0 \text{ (cte)} \tag{6}$$

Sustituyendo en (2) se obtiene el valor de $\dot{\varphi}$ igualmente constante:

$$\dot{\varphi} = -2\omega_0 \tag{7}$$

La expresión de la velocidad angular resulta:

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{3}{2}\boldsymbol{k}\right) \tag{8}$$

3. Llamando $\boldsymbol{I}$ al versor de dirección horizontal contenido en el plano vertical definido por $\boldsymbol{K}$ y el centro de masas G del sólido, las componentes de la reacción en O y de la reacción en el punto de contacto del disco con el plano horizontal las denominaremos:

$$\boldsymbol{R}_O = X\boldsymbol{I} + Y\boldsymbol{J} + Z\boldsymbol{K}, \quad \boldsymbol{N} = N\boldsymbol{K} \tag{9}$$

El centro de masas G del sólido describe una circunferencia con velocidad constante de módulo $v_G = 3/4\,\omega_0 R$, por lo que su aceleración es: $\boldsymbol{a}_G = -\frac{3}{4}\omega_0^2 R\boldsymbol{I}$. Planteando las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento resulta:

$$X = -\frac{3}{4}m\omega_0^2 R \tag{10}$$

$$Y = 0 \tag{11}$$

$$Z + N - mg = 0 \tag{12}$$

El momento en O de las fuerzas aplicadas en el sólido es: $\boldsymbol{M}_O = (N - 3mg/4)R\boldsymbol{j}$. Planteando ahora el balance del momento cinético en O:

$$\boldsymbol{M}_O = \underbrace{\left(\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt}\right)_{\text{rel}}}_{=0} + (\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\boldsymbol{k}) \wedge \frac{mR^2\omega_0}{16}\left(\frac{13\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{k}\right) \tag{13}$$

se obtiene:

$$N = \frac{3}{4}mg + \frac{19\sqrt{3}}{64}mR\omega_0^2 \tag{14}$$

de donde, sustituyendo en (12), resulta:

$$Z = mg/4 - \frac{19\sqrt{3}}{64}mR\omega_0^2 \tag{15}$$

4. El sólido tiende a despegarse por el punto O ya que N no puede anularse para ningún valor de ω. Haciendo $Z = 0$ en (15) se obtiene el valor de ω_0 buscado:

$$\omega_0^2 = \frac{16\sqrt{3}}{57}\frac{g}{R} \tag{16}$$