Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (6 de julio de 2015)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.b (puntuación: 5/30) Tiempo: 30 min.

Responder *dentro del espacio provisto en la hoja.*

Se considea un sólido rígido $\mathcal{B}$ con el movimiento más general posible. *Desarrollar* la expresión del momento cinético de $\mathcal{B}$ respecto a su centro de masas G. *Definir* a partir de esta expresión el tensor de inercia del sólido en G.

Aplicación: Sea un disco plano de masa m y radio r, con velocidad de rotación de magnitud ω y cuya dirección forma 45° con el plano del disco. Expresar las componentes del tensor de inercia y el momento cinético del disco en su centro.

El momento cinético de $\mathcal{B}$ respecto a su centro de masas G se expresa como:

$$\boldsymbol{H}_G = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{v}\,\rho\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}' \wedge (\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}')\rho\,\mathrm{d}V, \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{v}_G$ la velocidad del centro de masas; $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular del sólido; ρ la densidad y $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_G$, la posición de los puntos del sólido respecto a G. Desarrollando esta expresión:

$$\boldsymbol{H}_G = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{v}_G\,\rho\,\mathrm{d}V}_{=\boldsymbol{0}} + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}')\rho\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} [r'^2\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{r}']\rho\,\mathrm{d}V = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}\,, \tag{2}$$

siendo el desarrollo en componentes cartesianas (notación indicial con sumatoria implícita para índices repetidos)

$$H_{G,i} = \int_{\mathcal{B}} [r'^2\Omega_i - (r'_j\Omega_j)r'_i]\rho\,\mathrm{d}V = I_{G,ij}\Omega_j\,. \tag{3}$$

La definición del tensor de inercia $\boldsymbol{I}_G$ en esta expresión es

$$\boxed{\boldsymbol{I}_G = \int_{\mathcal{B}} (r'^2\boldsymbol{1} - \boldsymbol{r}' \otimes \boldsymbol{r}')\rho\,\mathrm{d}V \ \Leftrightarrow\ I_{G,ij} = \int_{\mathcal{B}} (r'^2\delta_{ij} - r'_i r'_j)\rho\,\mathrm{d}V\,.} \tag{4}$$

Aplicación: Sea un sistema de ejes que acompaña el movimiento del disco $(G, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, de forma que $\boldsymbol{k}$ tiene la dirección del eje de revolución e $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ son direcciones radiales mutuamente perpendiculares en el plano del disco. Supondremos $\boldsymbol{j}$ alineado con la proyección de la velocidad angular sobre el disco, sin pérdida de generalidad. En dichos ejes, el tensor central de inercia y la velocidad angular son

$$[\boldsymbol{I}_G] = mr^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \omega\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\,, \tag{5}$$

por lo que el momento cinético resulta:

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = mr^2\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right). \tag{6}$$