GRADO EN INGENIERÍA CIVIL Y TERRITORIAL

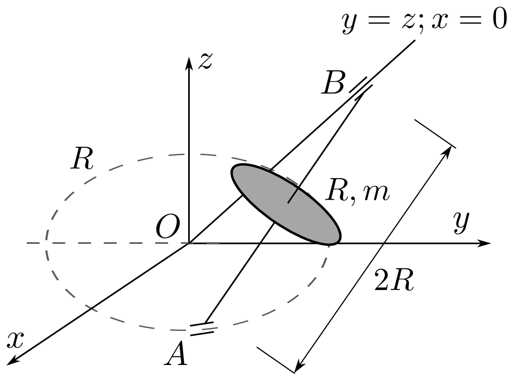
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (6 de julio de 2015)

Apellidos	*Nombre*	*Nº mat.*	*Grupo*

Ejercicio 2º (Puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Sea un disco pesado de radio R y de masa m. El disco está soldado perpendicularmente en su centro al punto medio de una varilla sin masa y con longitud $2R$. Este sistema se mueve con el movimiento más general posible tal que su vértice A se desplaza sin rozamiento en una circunferencia de radio R, contenida en el plano Oxy y centrada en O, y su vértice B se desplaza sin rozamiento en la recta $\{y = z; x = 0\}$ (ver figura).



Para el sistema así descrito se pide:

1. Grados de libertad del problema y velocidad angular del sistema.
2. Razonar la existencia de integrales primeras y en el caso de que existan obtener su expresión en función de los grados de libertad y de sus derivadas.
3. Ecuaciones cardinales de la dinámica.
4. Reacciones en los extremos de la varilla A y B.

⋆

1.– El sistema tiene dos grados de libertad (una vez definido el punto A con un parámetro, el punto B ya tiene una posición dada y solo queda definir la rotación propia). Utilizaremos los ángulos de Euler para definir la posición del sistema sabiendo que la precesión ψ y la nutación θ están relacionadas entre sí según la siguiente expresión (ver Fig. 1):

$$OA' = R\cos\alpha = R\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = R\sqrt{1-4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\psi}$$
$$OB' = 2R\operatorname{sen}\theta = R\sqrt{1-4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\psi} + 2R\cos\theta\cos\psi$$
$$\frac{3}{4} = \operatorname{sen}2\theta\cos\psi \qquad (1)$$

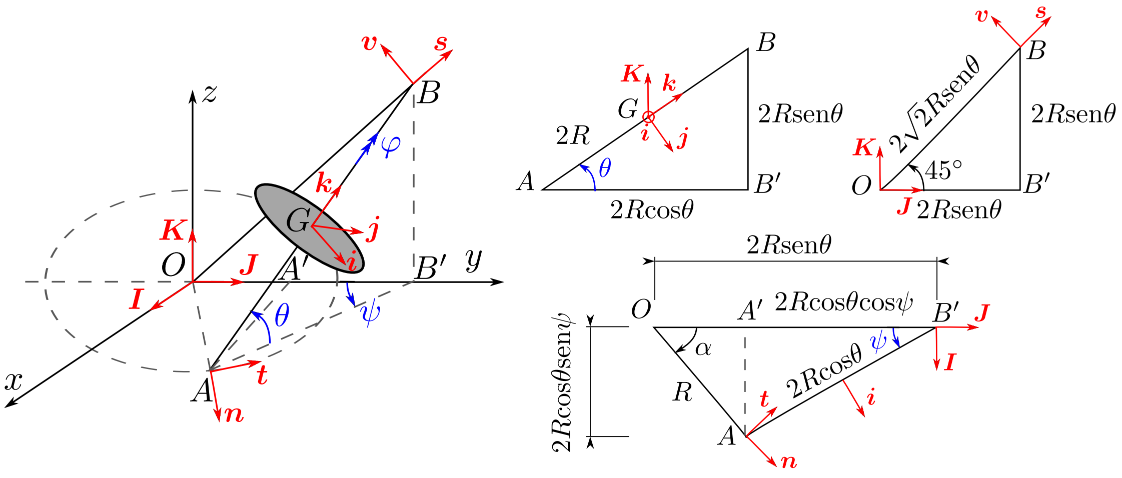


Figura 1: Descripción del sistema.

Definiremos la velocidad angular en el triedo intermedio $\{G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ siendo $\boldsymbol{i}$ horizontal, $\boldsymbol{k}$ tiene la dirección AB y $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i}$ la dirección de máxima pendiente del disco (ver Fig. 1):

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} + \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} - \dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{j} + \underbrace{(\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{\varphi})}_{r}\boldsymbol{k} \tag{2}$$

donde hemos usado $\boldsymbol{K} = -\cos\theta\boldsymbol{j} + \mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{k}$.

Para obtener la relación de las velocidades angulares $\dot{\psi}$ y $\dot{\theta}$ derivamos respecto al tiempo la expresion (1) y resulta:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\psi}}{2}\tan 2\theta \tan\psi. \tag{3}$$

2.– El sistema tiene simetría de revolución y todas las fuerzas actuantes (reacciones en A y B y el peso) cortan al eje de simetría por lo que se conserva la proyección del momento cinético en G sobre la dirección $\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} = (\mathbf{I}_G\boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\left(\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{\varphi}\right)R^2 m = cte \tag{4}$$

siendo las componentes del tensor de inercia $\mathbf{I}_G$:

$$[\mathbf{I}_G] = \frac{1}{4}mR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Así mismo todas las fuerzas que trabajan (el peso) son conservativas y no hay ningún movimiento impuesto por lo que se conserva la energía mecánica.

$$E = T + V = cte \tag{6}$$

La energía potencial se expresa como:

$$V = mg\left(\boldsymbol{r}_{AG} \cdot \boldsymbol{K}\right) = mgR \operatorname{sen}\theta. \tag{7}$$

Para obtener la energía cinética utilizamos el teorema de König:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{I}_G\,\boldsymbol{\Omega} \tag{8}$$

La velocidad del punto G se obtiene a partir de la velocidad del punto B (campo de velocidades de un sólido rígido):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_G =& \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{BG} = \left(2\,R\dot{\theta}\cos\theta \operatorname{sen}\psi + R\dot{\psi}\cos\theta\right)\boldsymbol{i}\\ &+\left(\frac{1}{4}\left(8\operatorname{sen}^2\theta - 1\right)R\dot{\theta}\right)\boldsymbol{j} + 2\cos\theta(\cos\psi\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)R\dot{\theta}\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{9}$$

donde hemos usado la relación (1), $\boldsymbol{r}_{BG} = -R\boldsymbol{k}$ y que la velocidad del punto B es:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = 2\sqrt{2}R\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{s} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_B = 2\sqrt{2}R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{s}, \tag{10}$$

siendo $\boldsymbol{s} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{J} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{J} = \operatorname{sen}\psi\boldsymbol{i} + \cos\psi\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} + \cos\psi\cos\theta\boldsymbol{k}$.

Finalmente la energía cinética vale:

$$\begin{aligned}T =& mR^2\Bigg(\dot{\theta}^2\left(\frac{11}{8} + 2\cos^2\theta\right) + \dot{\psi}\dot{\theta}\left(2\operatorname{sen}\psi\cos^2\theta\right)\\ &+\dot{\psi}^2\left(-\frac{3}{8}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{5}{8}\right) + \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\,\dot{\varphi}^2\Bigg).\end{aligned} \tag{11}$$

3.– Las ecuaciones cardinales de la dinámica son:

$$\sum \boldsymbol{F}^{\text{ext}} = m\boldsymbol{a}_G; \qquad \boldsymbol{M}_G = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

La aceleración $\boldsymbol{a}_G$ la calculamos a partir de la aceleración $\boldsymbol{a}_B$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_G =& \boldsymbol{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{BG} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{BG})\\ &\left(-2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta + 2\ddot{\theta}\operatorname{sen}\psi - 2\dot{\psi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \ddot{\psi}\cos\theta\right)R\boldsymbol{i} +\\ &\left(\frac{1}{2}\dot{\psi}^2\operatorname{sen}2\theta + \dot{\theta}^2\operatorname{sen}2\theta + \ddot{\theta}\left(1 - 2\cos\theta + \frac{3}{4\cos\theta}\right) - \frac{3\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta}{4\,\cos\theta} + \right)R\boldsymbol{j} +\\ &\left(\dot{\psi}^2\cos^2\theta - 2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2\theta + \ddot{\theta}2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{3\ddot{\theta}}{4\,\operatorname{sen}\theta}\right)R\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{13}$$

siendo:

$$\boldsymbol{a}_B = -2\sqrt{2}R\Big(\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\Big)\boldsymbol{s} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} =& \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}\right|_{\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\}} + \boldsymbol{\Omega}_{\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\}} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \left(-\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta + \ddot{\theta}\right)\boldsymbol{i} \\ &+ \left(\dot{\psi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta} - \ddot{\psi}\cos\theta\right)\boldsymbol{j} + \left(\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta + \ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta + \ddot{\varphi}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\}} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} + \dot{\theta}\boldsymbol{i} \tag{16}$$

Las fuerzas actuantes son:

- El peso: $\boldsymbol{P} = -mg\boldsymbol{K}$
- La reacción en A: $\boldsymbol{R}_A = R_A^n\boldsymbol{n} + R_A^K\boldsymbol{K}$
- La reacción en B: $\boldsymbol{R}_B = R_B^v\boldsymbol{v} + R_B^I\boldsymbol{I}$

donde $\boldsymbol{I} = \cos\psi\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} - \cos\theta\operatorname{sen}\psi\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{J} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{n} = \operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{I} + \cos\alpha\boldsymbol{J}$. La resultante de las fuerzas exteriores al sistema es:

$$\sum \boldsymbol{F}^{\text{ext}} = -mg\boldsymbol{K} + R_A^n\boldsymbol{n} + R_A^K\boldsymbol{K} + R_B^v\boldsymbol{v} + R_B^I\boldsymbol{I} \tag{17}$$

El momento cinético vale:

$$\boldsymbol{H}_G = \mathbf{I}_G\,\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{4}R^2m\dot{\theta}\boldsymbol{i} - \frac{1}{4}R^2m\dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\left(\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta + \dot{\varphi}\right)R^2m\boldsymbol{k} \tag{18}$$

y su derivada temporal vale:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} =& \left.\frac{\partial \boldsymbol{H}_G}{\partial t}\right|_{\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\}} + \boldsymbol{\Omega}_{\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\}} \wedge \boldsymbol{H}_G \\ =& \left(-\frac{1}{8}\dot{\psi}^2\operatorname{sen}2\theta - \frac{1}{2}\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta + \frac{1}{4}\ddot{\theta}\right)mR^2\boldsymbol{i} + \\ & \left(-\frac{1}{4}\dot{\varphi}\dot{\theta} - \frac{1}{4}\ddot{\psi}\cos\theta\right)mR^2\boldsymbol{j} + \left(\frac{1}{2}\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}\ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}\right)mR^2\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{19}$$

Finalmente el momento de las fuerzas en G vale:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_G =& \boldsymbol{r}_{GA} \wedge \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{r}_{GB} \wedge \boldsymbol{R}_B \\ & \Bigg(- R_{BI}\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta - R_{AK}\cos\theta + \\ & \frac{1}{2}\left(4\,R_{An}\cos\psi\operatorname{sen}^2\theta + \sqrt{2}R_{Bv}\cos\theta + \left(\sqrt{2}R_{Bv}\cos\psi - 4\,R_{An}\right)\operatorname{sen}\theta\right) + 2R_{An}\operatorname{sen}2\theta\Bigg)R\boldsymbol{i} + \\ & \left(R_{BI}\cos\psi - \frac{1}{2}\left(4\,R_{An}\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta + \sqrt{2}R_{Bv}\operatorname{sen}\psi\right)\right)R\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{20}$$

4.– Las reacciones en A y en B se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones de la expresión (12) en la que debemos substituir los valores de las ecuaciones (13), (17), (19) y (20). Tenemos seis ecuaciones de las que podremos obtener el valor de las cuatro incógnitas de las reacciones $\{R_A^n, R_A^K, R_B^v, R_B^I\}$ y las dos ecuaciones del movimiento.