Mecánica

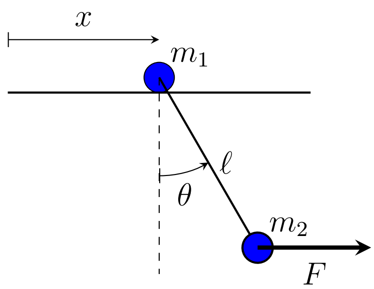
EXAMEN FINAL (8 de junio de 2015)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.a (puntuación: 5/30) Tiempo: 30 min.

Responder *dentro del espacio provisto en la hoja.*

Un sistema dinámico está definido por coordenadas libres $\{q_j, j = 1, \dots n\}$. *definir* el concepto de fuerzas generalizadas Q_j en el marco de la dinámica analítica.



Aplicación: El sistema de la figura está formado por dos masas puntuales, unidas por una varilla sin masa, de forma que la partícula m_1 permanece sobre una recta horizontal lisa y la partícula m_2 se mueve dentro del mismo plano vertical. Ambas masas están sometidas a su propio peso y m_2 a una fuerza horizontal F. Obtener las fuerzas generalizadas asociadas a los grados de libertad definidos.

Consideramos un sistema formado por partículas m_i, $i = 1, \dots N$, cuya configuración queda definida por coordenadas generalizadas q_j, $j = 1, \dots n$, de forma que la posición de cada partícula está determinada por relaciones $\boldsymbol{r}_i(q_j, t)$. Sobre el sistema actúan fuerzas $\boldsymbol{f}_i$.

Suponemos en un instante t desplazamientos virtuales arbitrarios $\delta\boldsymbol{r}_i$, compatibles con los enlaces, que pueden expresarse en función de las coordenadas generalizadas como $\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n}(\partial\boldsymbol{r}_i/\partial q_j)\delta q_j$. Desarrollando la expresión del trabajo virtual:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \sum_{j}^{n} \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \tag{1}$$

Los coeficientes entre paréntesis se definen como *«fuerzas generalizadas»* Q_j, que sustituidas en la expresión (1) permiten identificarlas asimismo como los coeficientes de δq_j en la expresión del trabajo virtual:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}; \quad \Rightarrow \quad \delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \,. \tag{2}$$

Si las fuerzas aplicadas proceden de un potencial, $\boldsymbol{f}_i = -\,\partial V/\partial\boldsymbol{r}_i$, las fuerzas generalizadas podrán obtenerse como:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \tag{3}$$

Aplicación: Las fuerzas aplicadas sobre m_2 son $\boldsymbol{f}_2 = F\,\boldsymbol{i} - mg\,\boldsymbol{k}$, siendo $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k})$ los versores de las direcciones horizontal y vertical respectivamente. Las fuerzas sobre m_1 no trabajan. Los desplazamientos virtuales compatibles de m_2 son $\delta\boldsymbol{r}_2 = (\delta x + \ell\delta\theta\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\ell\delta\theta\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{k}$. Desarrollando el trabajo virtual según la expresión (2):

$$\delta W = F(\delta x + \ell\delta\theta\cos\theta) - mg(\ell\delta\theta\operatorname{sen}\theta)\,, \tag{4}$$

e identificando coeficientes se obtienen las fuerzas generalizadas:

$$\boxed{Q_x = F\,, \quad Q_\theta = F\ell\cos\theta - mg\ell\operatorname{sen}\theta\,.} \tag{5}$$