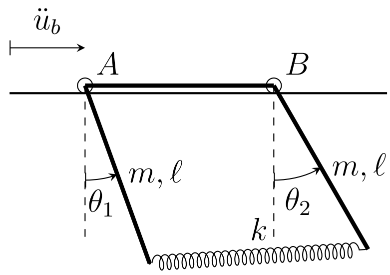
Mecánica – ICT

EXAMEN FINAL (8 de junio de 2015)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Se considera un sistema plano formado por dos barras pesadas de longitud ℓ y masa m que oscilan en un plano vertical colgando desde sendos puntos A y B unidos rígidamente entre sí. Los extremos inferiores de las barras están unidos por un resorte lineal de constante k cuya longitud natural es la distancia horizontal entre A y B. Se impone un movimiento horizontal en las bases A y B definido por su aceleración $\ddot{u}_b = a_0 \operatorname{sen}(\Omega t)$. Se pide



1. Obtener las ecuaciones de la dinámica linealizadas para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición vertical de las barras. Para simplificar el cálculo se podrá suponer la acción del muelle proporcional a su alargamiento horizontal.
2. Obtener los modos normales de vibración y frecuencias propias, tomando el valor de la constante del resorte $k = (1/3)mg/\ell$.
3. Obtener las masas y fuerzas modales y expresar las ecuaciones dinámicas desacopladas en función de las coordenadas normales.

§1. Obtendremos en primer lugar los coeficientes de masa y rigidez de las ecuaciones linealizadas considerando los puntos A y B como fijos, sin el movimiento de la base. A continuación tendremos en cuenta este movimiento impuesto a través de las fuerzas de inercia a las que equivale. La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}_2^2 \,. \tag{1}$$

Los coeficientes de la matriz de masas se obtienen derivando esta expresión,

$$m_{ij} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_i\partial\dot{\theta}_j}\right|_{\theta_i=0} \quad\Rightarrow\quad [\mathbf{M}] = \frac{1}{3}m\ell^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \,. \tag{2}$$

El potencial del sistema se expresa a partir de la altura de los centros de cada barra y de la elongación del resorte, para la que consideraremos la simplificación que indica el enunciado:

$$V = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta_1 - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta_2 + \frac{1}{2}k\ell^2(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1)^2 \,. \tag{3}$$

Los coeficientes de rigidez se obtienen análogamente derivando esta expresión,

$$k_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right|_{\theta_i=0} \quad\Rightarrow\quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix}mg\ell/2 + k\ell^2 & -k\ell^2\\ -k\ell^2 & mg\ell/2 + k\ell^2\end{pmatrix} \,. \tag{4}$$

La aceleración impuesta en la base es un movimiento de traslación en dirección horizontal $\boldsymbol{i}$. Se puede considerar en el sistema relativo (no inercial) mediante unas fuerzas de inercia, aplicadas en el centro de masas de cada una de las barras, con valor $\boldsymbol{f}_{\text{iner}} = -m\ddot{u}_b\boldsymbol{i}$. Para obtener las fuerzas generalizadas correspondientes expresamos el trabajo virtual para desplazamientos $\{\delta\theta_1, \delta\theta_1\}$:

$$\delta W = -m\ddot{u}_b\frac{\ell}{2}\cos\theta_1\,\delta\theta_1 - m\ddot{u}_b\frac{\ell}{2}\cos\theta_2\,\delta\theta_2 = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2\,, \tag{5}$$

de donde, identificando coeficientes, se obtiene el vector de fuerzas

$$\{\mathbf{f}\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = -m\ddot{u}_b\frac{\ell}{2}\begin{Bmatrix} \cos\theta_1 \\ \cos\theta_2 \end{Bmatrix} \approx -m\ddot{u}_b\frac{\ell}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\,. \tag{6}$$

Las ecuaciones linealizadas resultan entonces

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta}_1 + \big(mg\dfrac{\ell}{2} + k\ell^2\big)\theta_1 - k\ell^2\theta_2 = -m\dfrac{\ell}{2}a_0\,\mathrm{sen}\,\Omega t \\ \dfrac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta}_2 - k\ell^2\theta_1 + \big(mg\dfrac{\ell}{2} + k\ell^2\big)\theta_2 = -m\dfrac{\ell}{2}a_0\,\mathrm{sen}\,\Omega t \end{cases} \tag{7}$$

§2. Para el valor dado $k = (1/3)mg/\ell$ la matriz de rigidez (4) vale

$$[\mathbf{K}] = mg\ell\begin{pmatrix} 5/6 & -1/3 \\ -1/3 & 5/6 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Las frecuencias propias resultan de resolver el polinomio característico,

$$0 = |\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}| = \begin{vmatrix} \frac{5}{6}mg\ell - \lambda\frac{1}{3}m\ell^2 & -\frac{1}{3}mg\ell \\ -\frac{1}{3}mg\ell & \frac{5}{6}mg\ell - \lambda\frac{1}{3}m\ell^2 \end{vmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \lambda_1 = \omega_1^2 = \dfrac{7}{2}\dfrac{g}{\ell} \\ \lambda_2 = \omega_2^2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{\ell} \end{cases} \tag{9}$$

Para estas frecuencias resultan unos vectores propios asociados (modos normales de vibración)

$$(\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{M})\{\mathbf{a}_i\} = \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \{\mathbf{a}_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{a}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\,. \tag{10}$$

§3. Las masas modales se obtienen como $M_i = \{\mathbf{a}_i\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_i\}$ (i no sumado), resultando

$$M_1 = \frac{2}{3}m\ell^2, \quad M_2 = \frac{2}{3}m\ell^2\,. \tag{11}$$

Por su parte las fuerzas modales se calculan como $\Gamma_i = \{\mathbf{a}_i\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{f}\}$, resultando

$$\Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = -m\ell a_0\,\mathrm{sen}(\Omega t)\,. \tag{12}$$

Conocidos estos coeficientes se pueden expresar las ecuaciones desacopladas en coordenadas normales:

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = \frac{\Gamma_i}{M_i} \quad (i \text{ no sumado}) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \ddot{u}_1 + \dfrac{7}{2}\dfrac{g}{\ell}u_1 = 0 \\ \ddot{u}_2 + \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{\ell}u_2 = -\dfrac{3}{2}\dfrac{a_0}{\ell}\,\mathrm{sen}(\Omega t) \end{cases} \tag{13}$$

Las soluciones $u_i(t)$ a estas ecuaciones son las amplitudes de los modos normales de vibración en el movimiento resultante. Se comprueba que el primer modo, al tener fuerza modal nula, no se ve excitado por este movimiento impuesto.