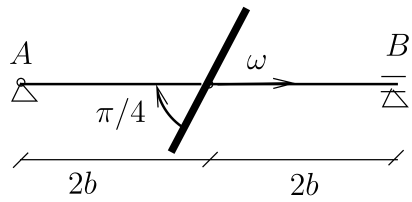
Mecánica

EXAMEN FINAL (8 de junio de 2015)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

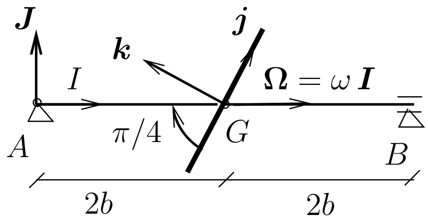
Un disco de masa m y radio R gira alrededor de un eje horizontal con velocidad angular constante ω. El eje de giro está unido rígidamente al disco, forma 45º con el eje del mismo y se apoya en dos puntos A y B que distan $2b$ del centro del disco, tal y como se muestra en la figura. Se pide, para una posición genérica del disco:



1. Obtener las ecuaciones cardinales de la dinámica.
2. Obtener las reacciones en A y B.

---

§1. Las ecuaciones cardinales de la dinámica del sólido rígido son las expresadas a continuación:



$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_G\,; \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_G\,. \tag{1}$$

Definimos un triedro ortonormal fijo $(A, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$, en el que $\boldsymbol{I}$ tiene la dirección del eje AB y $\boldsymbol{J}$ está contenido en el plano vertical. Dado que $\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{0}$, de la ecuación de la cantidad de movimiento expresada en dichos ejes se deducen las siguientes ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} R_{AX} &= 0 \\ R_{AY} + R_{BY} - mg &= 0 \\ R_{AZ} + R_{BZ} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

El momento de las reacciones con respecto al centro del disco G resulta:

$$\boldsymbol{M}_G = 2b(R_{AZ} - R_{BZ})\boldsymbol{J} + 2b(R_{BY} - R_{AY})\boldsymbol{K} \tag{3}$$

La ecuación del momento cinético la expresamos en un sistema de ejes móviles $(G, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ que acompañan el movimiento del disco, en el que $\boldsymbol{k}$ tiene la dirección del eje de revolución del disco. En la figura se ha representado en un instante particular en el que $\boldsymbol{k}$ se encuentra en el plano vertical. El tensor central de inercia expresado en el sistema de ejes cuerpo definido resulta:

$$[\boldsymbol{I}_G] = mR^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

La velocidad angular expresada en ejes fijos y ejes cuerpo:

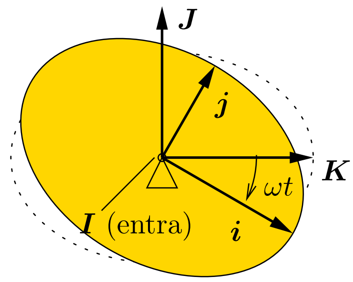
$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\boldsymbol{I} = \omega\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}). \tag{5}$$

por lo que el momento cinético resulta:

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{\sqrt{2}}{4} m R^2 \omega \left(\frac{\boldsymbol{j}}{2} - \boldsymbol{k} \right). \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{H}_G = -\frac{mR^2\omega^2}{8} \boldsymbol{i}. \tag{7}$$

Expresamos ahora la ecuación del momento cinético (7) en los ejes fijos. Para ello se supondrá que en el instante inicial el eje de revolución $\boldsymbol{k}$ se encuentra en el plano vertical y el eje $\boldsymbol{i}$ es horizontal. Se muestra en la figura la proyección sobre el plano YZ donde se ve el versor $\boldsymbol{i}$ en verdadera magnitud, siendo su expresión al rotar $\boldsymbol{i} = \cos\omega t\, \boldsymbol{K} - \operatorname{sen}\omega t\, \boldsymbol{J}$. Se deducen las siguientes ecuaciones escalares:



$$\begin{aligned} R_{AZ} - R_{BZ} &= \frac{mR^2}{16b}\omega^2 \operatorname{sen}\omega t \\ R_{BY} - R_{AY} &= -\frac{mR^2}{16b}\omega^2 \cos\omega t \end{aligned} \tag{8}$$

§2. Teniendo en cuenta las ecuaciones (2) y (8) las reacciones resultan:

$$\begin{aligned} R_{AX} = R_{BX} &= 0 \\ R_{AZ} = -R_{BZ} &= \frac{mR^2}{32b}\omega^2 \operatorname{sen}\omega t \\ R_{AY} &= \frac{mg}{2} + \frac{mR^2}{32b}\omega^2 \cos\omega t \\ R_{BY} &= \frac{mg}{2} - \frac{mR^2}{32b}\omega^2 \cos\omega t \end{aligned} \tag{9}$$