Mecánica EXAMEN FINAL EXTR. (13 de julio de 2016)

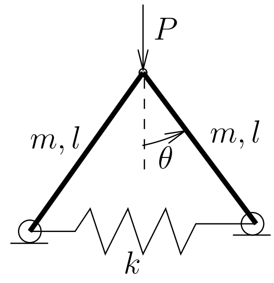
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.b (puntuación: 5/30) Tiempo: 30 min.

Responder *dentro del espacio provisto en la hoja.*

Se considera un sistema de partículas $i = 1, \dots N$ caracterizado por coordenadas generalizadas q_j, con $j = 1, \dots n$. *Definir* el concepto de trabajo virtual y *enunciar* el Principio de los Trabajos Virtuales para el equilibrio.

APLICACIÓN: Sean dos varillas de masa m y longitud l, articuladas entre sí formando un ángulo 2θ y unidas mediante un muelle de constante k. Sobre dicha estructura se aplica además de su peso propio, una carga P en el vértice superior. Determinar la fuerza generalizada correspondiente a la coordenada θ a partir de la expresión del trabajo virtual.



El trabajo virtual realizado por las fuerzas $\boldsymbol{F}_i$ para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales $\{\delta\boldsymbol{r}_i\}$ se define como: $\delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i$.

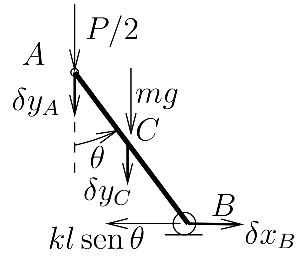
Las fuerzas aplicadas se pueden descomponer en fuerzas activas ($\boldsymbol{f}_i$) y fuerzas reactivas ($\boldsymbol{R}_i$). En el caso de un sistema con enlaces lisos en el que los desplazamientos virtuales resulten compatibles con los enlaces el trabajo virtual se puede expresar del modo siguiente:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{R}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i}_{=0} = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i, \quad \{\delta\boldsymbol{r}_i\}\text{comp.} \,.$$

El Principio de los Trabajos Virtuales se puede enunciar: *"En un sistema material sometido a enlaces lisos, es condición necesaria y suficiente para el equilibrio que el trabajo de las fuerzas aplicadas para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces sea nulo":*

$$\boxed{\delta W = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0. \quad \{\delta\boldsymbol{r}_i\}\text{comp.}}$$

APLICACIÓN:De acuerdo con los ejes indicados en la figura y haciendo uso de la simetría del problema, el trabajo virtual de las fuerzas activas resulta:



$$\delta W = -\frac{P}{2}\boldsymbol{j}\cdot\delta\boldsymbol{r}_A - mg\boldsymbol{j}\cdot\delta\boldsymbol{r}_C + kl\,\mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_B = -\frac{P}{2}\delta y_A - mg\delta y_C - kl\,\mathrm{sen}\,\theta\delta x_B$$

donde:

$$y_A = l\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \delta y_A = -l\,\mathrm{sen}\,\theta\delta\theta$$
$$x_B = l\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \delta x_B = l\cos\theta\delta\theta$$
$$y_C = (l/2)\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \delta y_C = -(l/2)\,\mathrm{sen}\,\theta\delta\theta$$

$$\delta W = \left(\frac{P}{2}l\,\mathrm{sen}\,\theta + mg\frac{l}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta - kl^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right)\delta\theta = \frac{Q_\theta}{2}\delta\theta$$

Por lo que la fuerza generalizada asociada a la coordenada θ resulta finalmente:

$$\boxed{Q_\theta = Pl\,\mathrm{sen}\,\theta + mgl\,\mathrm{sen}\,\theta - 2kl^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}$$

-