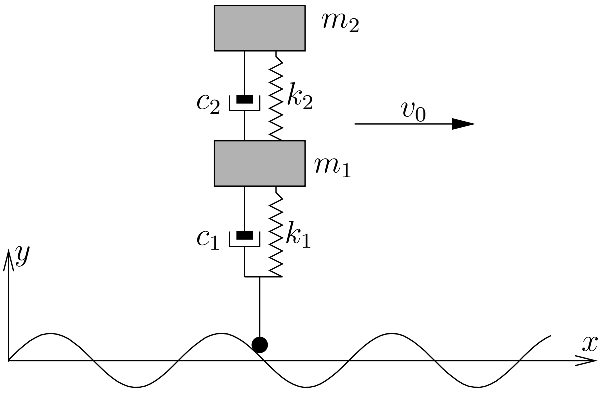
MECÁNICA – EXAMEN FINAL EXTR. (13 de julio del 2016)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

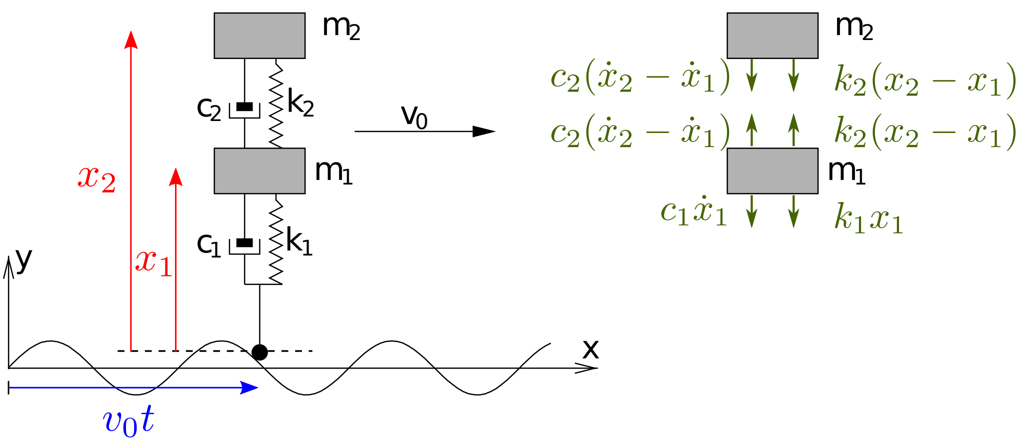
Ejercicio 2 (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

La respuesta dinámica vertical de un coche ferroviario se puede estudiar mediante un modelo de 1/4 de vehículo formado por las masas de bogie y caja (m_1, m_2) unidas por las suspensiones primaria y secundaria con rigideces (k_1, k_2) y amortiguamientos (c_1, c_2). Se desea estudiar la respuesta dinámica de este modelo circulando a velocidad constante v_0 sobre una vía con una irregularidad geométrica definida por una función armónica con longitud de onda λ y amplitud vertical A. Se pide:



1. Definir las coordenadas que caracterizan los grados de libertad del sistema y obtener las ecuaciones diferenciales de la dinámica. Expresar las matrices de masa, amortiguamiento, rigidez y de fuerzas de excitación.
2. Considerando amortiguamiento nulo ($c_1 = c_2 = 0$) y los demás datos $m_1 = 1\,750\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 12\,000\,\mathrm{kg}$, $k_1 = 2\,400\,\mathrm{kN/m}$, $k_2 = 350\,\mathrm{kN/m}$ obtener las frecuencias propias y los modos normales para las vibraciones libres del vehículo (sin excitación).
3. Obtener las ecuaciones diferenciales desacopladas en coordenadas normales para la amplitud de cada modo de vibración, considerando $\lambda = 15\,\mathrm{m}$, $A = 10\,\mathrm{mm}$ y $v_0 = 270\,\mathrm{km/h}$. (se seguirá considerando amortiguamiento nulo.)
4. Suponiendo que el amortiguamiento es pequeño ($c_1 = c_2 \approx 0$) pero suficiente para que se alcance un movimiento de régimen permanente al cabo del tiempo, obtener dicho movimiento para cada modo de vibración.

1.– Consideraremos las coordenadas $\{x_1, x_2\}$ de cada una de las masas relativas a la cota de la vía, tomando como el origen de coordenadas la posición natural bajo la carga gravitatoria estática. La irregularidad de la vía la definiremos usando la expresión $y = A\,\mathrm{sen}(\Omega t)$ (ver figura), siendo $\Omega = 2\pi v_0/\lambda = 10\pi$ (con los datos del enunciado).



Las fuerzas actuantes en cada masa son (con su signo, ver figura):

$$F_1 = c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) - c_1\dot{x}_1 - k_1x_1 \tag{1}$$

$$F_2 = -c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) \tag{2}$$

Las aceleraciones de los centros de masas son:

$$a_1 = \ddot{y} + \ddot{x}_1 = -\Omega^2 A \,\mathrm{sen}(\Omega t) + \ddot{x}_1 \tag{3}$$

$$a_2 = \ddot{y} + \ddot{x}_2 = -\Omega^2 A \,\mathrm{sen}(\Omega t) + \ddot{x}_2 \tag{4}$$

Las ecuaciones de la dinámica quedan por tanto (las presentamos en forma matricial porque el problema es lineal):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}}_{=[\mathbf{M}]} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}}_{=[\mathbf{C}]} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}}_{=[\mathbf{K}]} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} A\Omega^2 \,\mathrm{sen}(\Omega t)}_{=[\mathbf{f}(t)]} \tag{5}$$

Siendo las componentes de las matrices de masa $[\mathbf{M}]$, amortiguamiento $[\mathbf{C}]$, rigidez $[\mathbf{K}]$ y de las fuerzas de excitación $[\mathbf{f}(t)]$ las indicadas.

2.– Para $c_1 = c_2 = 0$ las frecuencias propias vienen de obtener las raíces α_1 y α_2 del polinomio característico (haciendo $\alpha = \omega^2$):

$$\det(-\alpha\mathbf{M} + \mathbf{K}) = m_1m_2\alpha^2 - (m_1k_2 + m_2(k_1 + k_2))\alpha + k_1k_2 = 0 \tag{6}$$

cuya solución, para los valores numéricos del problema, es $\omega_1 = \sqrt{\alpha_1} = 5.039$ rad/s y $\omega_2 = \sqrt{\alpha_2} = 39.689$ rad/s.

Los modos normales $\mathbf{a}_i$ se calculan resolviendo el sistema $(-\omega_i^2\mathbf{M}+\mathbf{K})\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ para cada valor de ω_i obteniéndose (se ha normalizado respecto del primer elemento de cada modo normal):

$$\omega_1 = 5.039 \text{ rad/s} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}_1^T = (1, 7.730) \tag{7}$$

$$\omega_2 = 39.689 \text{ rad/s} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}_2^T = (1, -0.0189) \tag{8}$$

3.– Las ecuaciones diferenciales desacopladas en coordenadas normales para la amplitud de cada modo son:

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = \frac{1}{M_k}\eta_k(t) \quad \text{con } k = 1, 2 \tag{9}$$

siendo las masas modales:

$$M_1 = \{\mathbf{a}_1\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{a}_1\} = 718817.26; \quad M_2 = \{\mathbf{a}_2\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{a}_2\} = 1754.27 \tag{10}$$

y las fuezas modales (para los valores numéricos del enunciado):

$$\eta_1 = \{\mathbf{a}_1\}^T\{\mathbf{f}\} = 932801.4 \,\mathrm{sen}(10\pi t); \quad \eta_2 = \{\mathbf{a}_2\}^T\{\mathbf{f}\} = 15037.5 \,\mathrm{sen}(10\pi t) \tag{11}$$

Las ecuaciones buscadas son:

$$\ddot{u}_1 + 25.394u_1 = 1.298 \,\mathrm{sen}(10\pi t) \tag{12}$$

$$\ddot{u}_2 + 1575.202u_2 = 8.572 \,\mathrm{sen}(10\pi t) \tag{13}$$

4.– Suponiendo un amortiguamiento pequeño ($c_1 = c_2 \approx 0$) la solución en régimen permante para las amplitudes de cada modo de vibración será del tipo $u_i(t) = b_i \,\mathrm{sen}(\Omega t)$. Imponiendo que esta solución cumpla las ecuaciones diferenciales (12)-(13) obtenemos los valores de b_i:

$$b_1 = \frac{1.298}{-(10\pi)^2 + 25.394} = -0.00135 \text{ m.}; \quad b_2 = \frac{8.572}{-(10\pi)^2 + 1575.202} = 0.01457 \text{ m.} \tag{14}$$