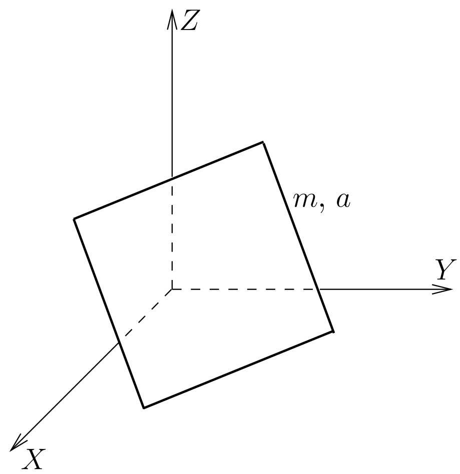
MECÁNICA – EXAMEN FINAL EXTR. (13 de julio del 2016)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3 (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

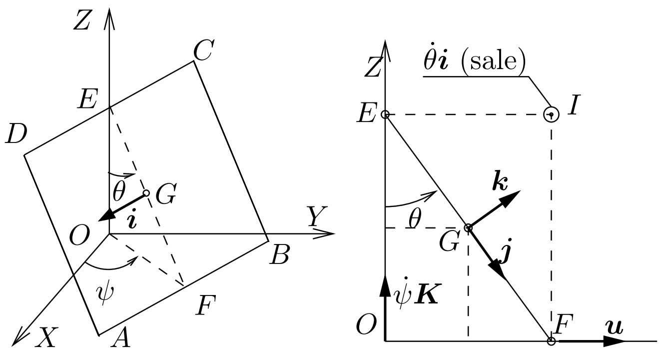
Una placa cuadrada de lado a, masa m y espesor despreciable se mueve de manera que uno de sus lados desliza sobre el plano OXY y el punto medio del lado opuesto se mueve en el eje OZ (ver figura). Todos los enlaces son lisos. Se pide:



1. Justificar si el movimiento de la placa es una rotación instantánea o no, y calcular la velocidad mínima.
2. Obtener las ecuaciones de Lagrange.
3. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento, y expresarlas en caso de que existan.

---

§1. El sistema tiene dos grados de libertad, que pueden definirse mediante las coordenadas ψ, ángulo girado por la recta que une los puntos medios EF alrededor del eje vertical OZ, y θ, ángulo que forma EF con el eje OZ descendiente. Empleando el vector unitario móvil $\boldsymbol{i}$ paralelo al lado BA, la expresión de la velocidad angular de la placa es



$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\psi\,\boldsymbol{K} + \dot\theta\,\boldsymbol{i} \tag{1}$$

Como puede verse en la figura, el movimiento es composición de dos rotaciones elementales ortogonales, con velocidades angulares $\dot\psi\,\boldsymbol{K}$ por O y $\dot\theta\,\boldsymbol{i}$ por I. Estas dos rotaciones se cruzan sin cortarse, por lo que el movimiento conjunto resultante no es una rotación pura sino un movimiento helicoidal tangente general con velocidad de deslizamiento o velocidad mínima no nula. Esta velocidad se puede obtener calculando la proyección de la velocidad de un punto del sólido sobre la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$. Para ello tomaremos la velocidad del punto E que vale $\boldsymbol{v}_E = -a\dot\theta\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{K}$, y considerando la expresión (1) resulta

$$v_{\min} = v_{\text{desl}} = \boldsymbol{v}_E\cdot\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = -\frac{a\dot\theta\dot\psi\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\dot\psi^2+\dot\theta^2}}\,. \tag{2}$$

§2. Obtenemos en primer lugar la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} \tag{3}$$

La velocidad $\boldsymbol{v}_G$ se expresa a partir de las rotaciones elementales

$$\boldsymbol{v}_G = -\dot\psi\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \dot\theta\frac{a}{2}\cos\theta\,\boldsymbol{u} - \dot\theta\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{K} \quad\Rightarrow\quad v_G^2 = \frac{a^2}{4}(\dot\psi^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2) \tag{4}$$

Las componentes del tensor de inercia en los ejes principales del cuerpo $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ son

$$[\boldsymbol{I}_G] = \frac{1}{12}ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

y la expresión de $\boldsymbol{\Omega}$ en estos mismos ejes

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{i} - \dot{\psi}\cos\theta\,\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k} \tag{6}$$

Operando en (3) resulta

$$T = \frac{1}{6}ma^2\big[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\big(\frac{1}{4} + \operatorname{sen}^2\theta\big)\big] \tag{7}$$

Teniendo en cuenta el potencial gravitatorio, resulta la Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{1}{6}ma^2\big[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\big(\frac{1}{4} + \operatorname{sen}^2\theta\big)\big] - mg\frac{a}{2}\cos\theta \tag{8}$$

Las ecuaciones de la dinámica de Lagrange se deducen derivando la expresión de la Lagrangiana,

$$0 = \frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} - \frac{1}{6}ma^2\dot{\psi}^2\operatorname{sen}2\theta - mg\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta \tag{9}$$

$$0 = \frac{1}{3}ma^2\ddot{\psi}\big(\frac{1}{4} + \operatorname{sen}^2\theta\big) - \frac{1}{6}ma^2\dot{\psi}\dot{\theta}\operatorname{sen}2\theta \tag{10}$$

Alternativamente, la segunda ecuación de las anteriores puede expresarse como la coordenada cíclica que se detalla a continuación.

§3. Existen dos integrales primeras: la de la energía y la coordenada cíclica ψ. La energía se conserva dado que las fuerzas son conservativas y no hay enlaces reónomos ni sistemas de coordenadas móviles. La expresión es

$$T + V = \frac{1}{6}ma^2\big[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\big(\frac{1}{4} + \operatorname{sen}^2\theta\big)\big] + mg\frac{a}{2}\cos\theta = E \text{ (cte.)} \tag{11}$$

La expresión de L (8) no depende de ψ por lo que esta coordenada es cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = \frac{1}{3}ma^2\dot{\psi}\big(\frac{1}{4} + \operatorname{sen}^2\theta\big) = p_\psi \text{ (cte.)} \tag{12}$$

Los valores de las constantes en estas integrales primeras (11), (12) se obtendrían a partir de las condiciones iniciales, no especificadas en el enunciado.

La integral primera (12) corresponde a la conservación del momento cinético en el punto fijo O proyectado según el eje vertical OZ, ya que las fuerzas externas sobre la placa son paralelas a OZ o pasan por dicho eje. La expresión del momento cinético se obtendría como

$$\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{r}_{OG} \wedge m\boldsymbol{v}_G) \cdot \boldsymbol{K} = \frac{1}{3}ma^2\dot{\psi}\big(\frac{1}{4} + \operatorname{sen}^2\theta\big)\,. \tag{13}$$