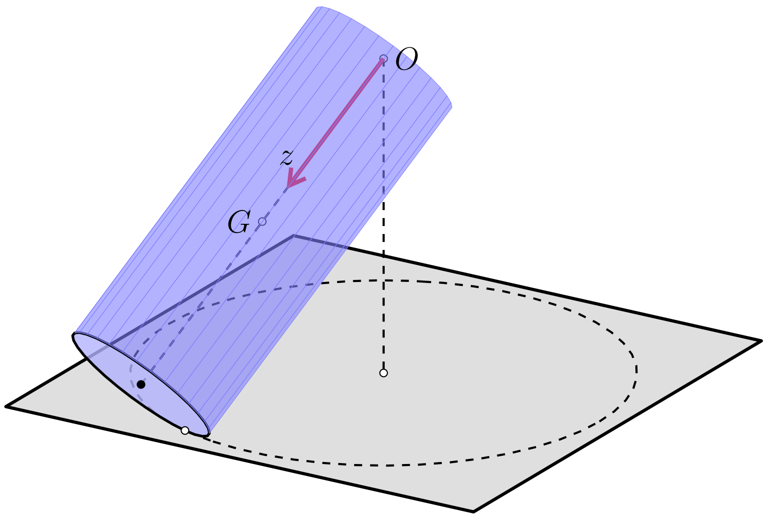
MECÁNICA – EXAMEN FINAL (6 de junio del 2016)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

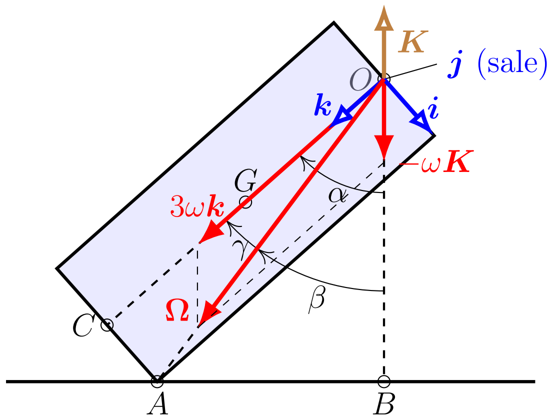
Ejercicio 3 (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Se considera un cilindro macizo de revolución con masa m, radio de la base r y altura $h = 2\sqrt{6}\,r$. El centro de una de sus bases O está fijo, mientras que el borde de la base opuesta apoya sobre un plano horizontal situado a una altura $4r$ por debajo de O, sobre el que rueda sin deslizar. El movimiento es tal que el eje Oz del cilindro realiza una vuelta completa alrededor de la vertical en un tiempo $T = 2\pi/\omega$, siendo ω constante. Se pide:



1. Caracterizar el movimiento del cilindro, discutiendo si es o no una rotación instantánea y calculando el vector velocidad de rotación.
2. Conociendo los momentos principales de inercia en el centro de masas del cilindro $[\boldsymbol{I}_G] = \operatorname{diag}(A, A, C)$, con $A = mr^2/4 + mh^2/12$, $C = mr^2/2$, obtener las componentes del tensor de inercia $[\boldsymbol{I}_O]$ en el punto fijo O. A partir de estas expresar la energía cinética T y el momento cinético en el punto fijo $\boldsymbol{H}_O$ en función de ω.
3. Aplicando las ecuaciones de la dinámica de Euler y considerando que el cilindro está sometido a su propio peso, calcular la reacción del plano sobre el cilindro. Se supondrá que el plano es liso.

§1. Para describir el movimiento se hace uso del plano meridiano dibujado en verdadera magnitud en la figura adjunta, definido como el plano móvil que contiene en todo instante al eje vertical OB y al eje del cono OG. Denominando A al punto de contacto entre cono y plano, observamos que al ser $\overline{CA} = r$ y $\overline{CO} = 2\sqrt{6}\,r$ resulta $\overline{AO} = 5r$. Por tanto, al valer $\overline{OB} = 4r$ se obtiene $\overline{AB} = 3r$. Los ángulos que forman estos segmentos son $\beta = \operatorname{arc\,sen}(3/5) = 36.870°$, $\gamma = \operatorname{arc\,sen}(1/5) = 11.537°$, $\alpha = \beta + \gamma = 48.407°$. El plano meridiano gira alrededor del eje vertical BO con velocidad angular $2\pi/T = \omega$.



Dado que O es un punto fijo y A tiene también velocidad nula (rueda sin deslizar), el movimiento es una rotación instantánea alrededor del eje OA, con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$.

El movimiento se puede interpretar como la composición de dos rotaciones (cuya suma será $\boldsymbol{\Omega}$), la del plano meridiano $\dot{\psi}\,\boldsymbol{K} = -\omega\,\boldsymbol{K}$ y la rotación propia del cono alrededor de su eje $\dot{\varphi}\,\boldsymbol{k}$. Esta composición debe ser tal que el punto A tenga velocidad nula, por lo que

$$0 = v_A = \dot{\varphi}\,\overline{CA} - \omega\,\overline{BA} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = 3\omega \tag{1}$$

Es decir, la velocidad angular vale

$$\boldsymbol{\Omega} = -\omega\,\boldsymbol{K} + 3\omega\,\boldsymbol{k} = \omega \operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{i} + \omega(3+\cos\alpha)\,\boldsymbol{k}\,, \tag{2}$$

donde se ha considerado que $\boldsymbol{K} = -\operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{i} - \cos\alpha\,\boldsymbol{k}$. Se observa que esta velocidad angular es constante en relación al plano meridiano, pero gira junto con dicho plano con velocidad angular $-\omega\,\boldsymbol{K}$.

§2. Las direcciones principales en G lo son también en O, por lo que el tensor de inercia es también diagonal, $[\boldsymbol{I}_O] = \operatorname{diag}(A', A', C')$, siendo

$$A' = A + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{33}{4}mr^2\,; \quad C' = C = \frac{1}{2}mr^2\,. \tag{3}$$

El momento cinético es

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega} = A'\omega\operatorname{sen}\alpha\;\boldsymbol{i} + C\omega(3+\cos\alpha)\,\boldsymbol{k}\,. \tag{4}$$

Y la energía cinética vale

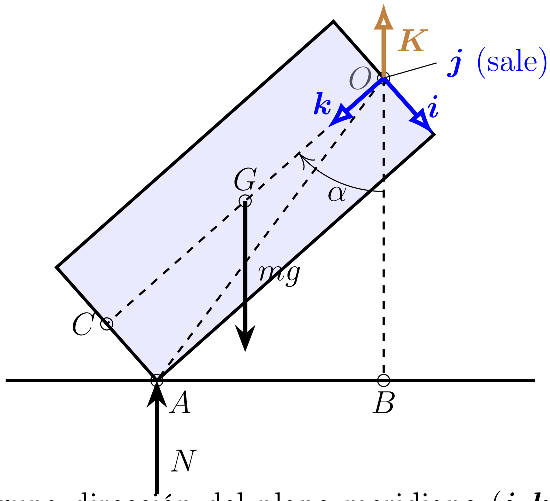
$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}A'\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1}{2}C\omega^2(3+\cos\alpha)^2\,. \tag{5}$$

§3. Teniendo en cuenta que las componentes de $\boldsymbol{H}_O$ según (4) son constantes en el plano meridiano, la ecuación (vectorial) de Euler de la dinámica se puede expresar como

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O = -\omega\,\boldsymbol{K}\wedge\boldsymbol{H}_O\,. \tag{6}$$

Desarrollando el lado derecho de esta expresión resulta

$$\boldsymbol{M}_O = \big[A'\cos\alpha - C(3+\cos\alpha)\big]\operatorname{sen}\alpha\,\omega^2\boldsymbol{j}\,. \tag{7}$$



Se comprueba que no debe haber momentos en ninguna dirección del plano meridiano $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k})$. Para ello las fuerzas sobre el cono deben estar todas contenidas en dicho plano. Estas fuerzas son el peso mg aplicado en G y la reacción normal N del plano liso. El momento de estas fuerzas es

$$\boldsymbol{M}_O = \big(\sqrt{6}\,r\,mg\operatorname{sen}\alpha - 3rN\big)\boldsymbol{j}\,. \tag{8}$$

Igualando (7) y (8) resulta

$$N = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{3}\Big\{\sqrt{6}\,mg - \big[A'\cos\alpha - C(3+\cos\alpha)\big]\frac{\omega^2}{r}\Big\}\,. \tag{9}$$