Mecánica EXAMEN FINAL (6 de junio de 2016)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.b (puntuación: 5/30) Tiempo: 30 min.

Responder *dentro del espacio provisto en la hoja.*

Se considera un cono de revolución macizo cuyo vértice O está fijo, con el movimiento más general posible, sometido a su propio peso. *Indicar* el número de grados de libertad del movimiento y las coordenadas adecuadas para definirlo. *Expresar* y *justificar* tres integrales primeras (conservación de magnitudes cinéticas) en función de dichas coordenadas y de los momentos principales de inercia. (no hará falta obtener el valor de estos momentos.)

Se incluyen a continuación las páginas del libro de texto donde se contiene la respuesta a estas cuestiones

Por último, a partir de este último resultado y las ecuaciones (9.17) y (9.23),

$$\dot{\varphi} = \frac{A-C}{A} r \quad \text{(cte)}.$$

Por tanto, en el caso en que el sólido sea de revolución, en el movimiento por inercia el eje del cuerpo $\boldsymbol{k}$ describe un cono circular alrededor de la dirección invariante (nutación θ constante). El movimiento de precesión de dicho eje $\boldsymbol{k}$ alrededor de la dirección invariante $\boldsymbol{K}$ tiene velocidad $\dot{\psi}$ constante, y adicionalmente una velocidad de rotación propia $\dot{\varphi}$ alrededor de $\boldsymbol{k}$ asimismo constante. El cono del cuerpo es de revolución, con semiángulo cónico dado por $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{C}{A} \operatorname{tg}\theta\right)$. El cono fijo es también de revolución, con semiángulo $\beta = \theta \pm \alpha$ (dos casos posibles).

9.3. La peonza simétrica

9.3.1. Ecuaciones del movimiento de una peonza

Consideramos ahora un caso algo más completo, el de un sólido simétrico[8], sometido a su propio peso (en un campo gravitacional constante) y con un punto de su eje de simetría fijo. Supondremos además que tiene una velocidad de rotación propia alrededor de su eje suficientemente elevada. Este caso corresponde a la peonza de los juegos infantiles (figura 9.9), pero también sirve para explicar el comportamiento de los giróscopos empleados en la navegación inercial de naves y el control de la orientación de sofisticados instrumentos como los telescopios espaciales. Como veremos, el movimiento de la peonza introduce algunas interesantes paradojas debidas al denominado *efecto giroscópico*.

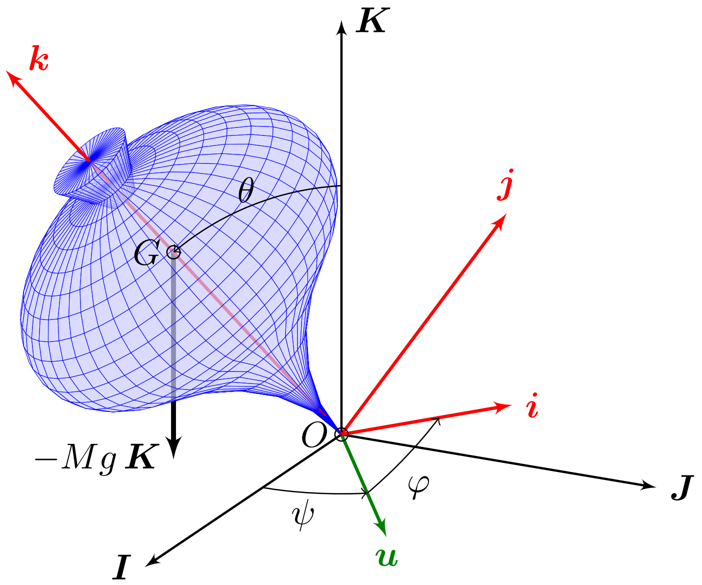
Figura 9.9: *Peonza simétrica sometida a su propio peso, con rotación propia elevada alrededor de su eje.*

El movimiento lo describiremos en los ejes locales del cuerpo, tomando $\boldsymbol{k}$ según el eje de revolución (figura 9.10), por lo que el tensor de inercia es:

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

[8] con tensor de inercia cilíndrico, como es el caso de un cuerpo de revolución

Figura 9.10: *Orientación de los ejes considerados para el movimiento de una peonza simétrica sometida a su propio peso alrededor de un punto fijo O de su eje.*



Emplearemos el método de Lagrange para obtener las ecuaciones del movimiento. La energía cinética vale:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}A(p^2+q^2) + \frac{1}{2}Cr^2$$

y desarrollando la expresión en función de los ángulos de Euler (7.54):

$$T = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 .$$

A su vez, el potencial es

$$V = Mgd\cos\theta$$

donde se ha llamado $d = \overline{OG}$, distancia entre el punto fijo y el centro de masas. La Lagrangiana resulta entonces:

$$L = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 - Mgd\cos\theta . \qquad (9.29)$$

Se observa que L no depende explícitamente de ψ ($\partial L/\partial\psi = 0$) ni de φ ($\partial L/\partial\varphi = 0$); por lo tanto ambas coordenadas son cíclicas, y podemos escribir las correspondientes integrales primeras como ecuaciones del movimiento:

$$p_\psi = A\dot{\psi}\operatorname{sen}^2\theta + C\dot{\psi}\cos^2\theta + C\dot{\varphi}\cos\theta = H \qquad \text{(cte)} \qquad (9.30)$$

$$p_\varphi = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = Cr \qquad \text{(cte)} \qquad (9.31)$$

La integral primera (9.30) corresponde a la constancia del momento cinético según el eje vertical $\boldsymbol{K}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{K} &= (Ap\,\boldsymbol{i}+Aq\,\boldsymbol{j}+Cr\,\boldsymbol{k})\cdot(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i}+\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j}+\cos\theta\,\boldsymbol{k})\\
&= A\dot\psi\operatorname{sen}^2\theta+Cr\cos\theta\\
&= A\dot\psi\operatorname{sen}^2\theta+C\dot\psi\cos^2\theta+C\dot\varphi\cos\theta=H\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Esta magnitud H se conserva puesto que el momento de las fuerzas en esta dirección fija es nulo:

$$M_Z=\boldsymbol{M}_O\cdot\boldsymbol{K}=[d\boldsymbol{k}\wedge(-Mg\boldsymbol{K})]\cdot\boldsymbol{K}=0\,. \tag{9.32}$$

La segunda integral primera (9.31) expresa la constancia de r, componente de la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ según el eje $\boldsymbol{k}$ del cuerpo; de forma equivalente, se puede considerar que establece la conservación del momento cinético según este eje:

$$\boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{k}=(Ap\,\boldsymbol{i}+Aq\boldsymbol{j}+Cr\,\boldsymbol{k})\cdot\,\boldsymbol{k}=Cr\,. \tag{9.33}$$

La conservación de esta magnitud no es tan obvia como en el caso anterior, al ser $\boldsymbol{k}$ una dirección móvil. Para justificarla derivamos directamente (9.33),

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{k}) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O\right)\cdot\boldsymbol{k}+\boldsymbol{H}_O\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}\\
&= \cancelto{0}{\boldsymbol{M}_O\cdot\boldsymbol{k}}+\boldsymbol{H}_O\cdot(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{k})=\cancelto{0}{(A-B)}pq,
\end{aligned}$$

siendo este término nulo gracias a que el sólido es de revolución ($A=B$).

Al no existir fuerzas disipativas, otra integral primera es la constancia de la energía, $T+V=E$.

En resumen el movimiento de la peonza simétrica con un punto fijo viene determinado por las tres integrales primeras siguientes:

$$H=A\dot\psi\operatorname{sen}^2\theta+Cr\cos\theta \qquad \text{(cte)} \tag{9.34}$$

$$r=\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta \qquad \text{(cte)} \tag{9.35}$$

$$E=\frac{1}{2}A(\dot\theta^2+\dot\psi^2\operatorname{sen}^2\theta)+\frac{1}{2}Cr^2+Mgd\cos\theta \qquad \text{(cte)} \tag{9.36}$$

A continuación estudiamos la solución de estas ecuaciones, lo que se desarrollará de manera cualitativa. En primer lugar despejamos $\dot\psi$ de (9.34),

$$\dot\psi=\frac{H-Cr\cos\theta}{A\operatorname{sen}^2\theta} \tag{9.37}$$