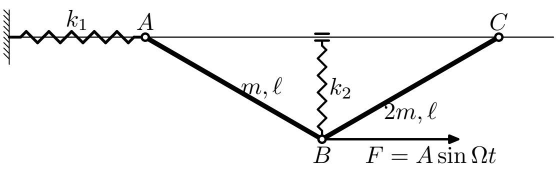
Mecánica

EXAMEN FINAL (6 de Junio de 2016)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º Tiempo: 60 min.

Un sistema mecánico está formado por dos varillas pesadas articuladas entre sí (en el punto B), AB de masa m y longitud ℓ y BC de masa $2m$ y longitud ℓ. Los extremos A y C están obligados a moverse según una recta horizontal mediante unas deslizaderas. El extremo A está unido a un muelle de constante k_1 y longitud natural nula cuyo extremo fijo está en la recta horizontal. La articulación de las varillas está unida por un muelle de constante k_2 y longitud natural nula mediante una deslizadera a la recta horizontal. Los valores de las constantes de los muelles son $k_1 = 104\frac{mg}{\ell}$ y $k_2 = 3\frac{mg}{\ell}$.



Se pide:

1. Para el caso de que no actúe la fuerza F.

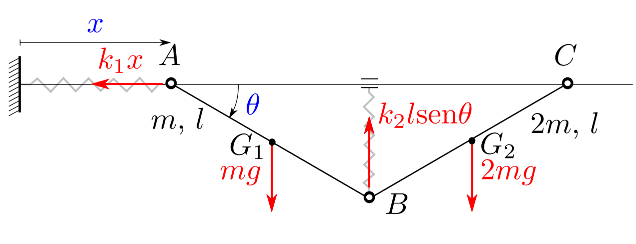
   a) Posición de equilibrio estable.

   b) Matrices de masa y rigidez para el problema de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.

   c) Frecuencias y modos propios.

2. Para el caso en el que actúe una fuerza horizontal de valor $F = A \sin \Omega t$ en la unión de las dos varillas, obtener las fuerzas modales, las masas modales y las ecuaciones del movimiento en coordenadas normales (suponiendo que las ecuaciones de las pequeñas oscilaciones son válidas).

1.– Elegimos como grados de libertad (el sistema tiene dos) el desplazamiento x del vértice A sobre la recta horizontal y el giro θ de la varilla AB. La posición de equilibrio será aquella para la cual el potencial de las fuerzas sea estacionario:



$$V = \frac{1}{2} k_2 l^2 \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{3}{2} glm \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2} k_1 x^2 \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x_{eq};\theta=\theta_{eq}} = k_1 x_{eq} = 0 \quad \rightarrow \quad x_{eq} = 0$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_{x=x_{eq};\theta=\theta_{eq}} = k_2 l^2 \cos\theta_{eq} \operatorname{sen}\theta_{eq} - \frac{3}{2} glm \cos\theta_{eq} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta_{eq_1} = \pi/6;\ \theta_{eq_2} = 5\pi/6;\ \theta_{eq_{3-4}} = \pm\pi/2;$$

Hemos obtenido las posiciones de equilibrio: $(x_{eq} = 0, \theta_{eq} = \pi/6)$, $(x_{eq} = 0, \theta_{eq} = 5\pi/6)$ y $(x_{eq} = 0, \theta_{eq} = \pm\pi/2)$. Utilizando la matriz hessiana de la función potencial vemos que las dos primeras posiciones de equilibrio son estables y las otras dos inestables.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{pmatrix}_{(x_{eq}=0,\ \theta_{eq}=\{\pi/6, 5\pi/6\})} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} k_2 l^2 + \dfrac{3}{4} glm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{104\, gm}{l} & 0 \\ 0 & \dfrac{9}{4} glm \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{pmatrix}_{(x_{eq}=0,\ \theta_{eq}=\pi/2)} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 l^2 + \dfrac{3}{2} glm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{104\, gm}{l} & 0 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} glm \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{pmatrix}_{(x_{eq}=0,\ \theta_{eq}=-\pi/2)} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 l^2 - \dfrac{3}{2} glm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{104\, gm}{l} & 0 \\ 0 & -\dfrac{9}{2} glm \end{pmatrix}$$

Las dos soluciones estables son simétricas respecto al plano vertical que pasa por el origen por lo que linealizaremos las ecuaciones del movimiento alrededor de la posición $(x_{eq} = 0, \theta_{eq} = \pi/6)$. Construimos la matriz de masa y de rigidez del problema a partir de las funciones energía potencial y energía cinética del sistema:

$$[\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{pmatrix}_{(x_{eq}=0,\theta_{eq}=\pi/6)} = \begin{pmatrix} \dfrac{104\, gm}{l} & 0 \\ 0 & \dfrac{9}{4} glm \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\theta}} \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{x}} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} \end{pmatrix}_{(x_{eq}=0,\theta_{eq}=\pi/6)} = \begin{pmatrix} 3\, m & -\dfrac{7}{4} lm \\ -\dfrac{7}{4} lm & 2\, l^2 m \end{pmatrix} \tag{3}$$

Habiéndose definido la energía potencial en la Ec. (1) y siendo la energía cinética:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m\, v_{G_1}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12} ml^2\, \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} 2m\, v_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12} 2ml^2\, \dot{\theta}^2 \\ &= -\frac{7}{2} lm\dot{\theta}\dot{x} \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\left(4\, l^2 m \operatorname{sen}^2\theta + l^2 m\right)\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2} m\dot{x}^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Las frecuencias y los modos propios los obtendremos resolviendo el problema de autovalores generalizado (haciendo $\alpha = \omega^2$):

$$(-\alpha[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}. \tag{5}$$

La ecuación característica es:

$$\det(-\alpha[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) = -\frac{49}{16}\,\alpha^2 l^2 m^2 + \frac{1}{4}\left(8\,\alpha l^2 m - 9\,glm\right)\left(3\,\alpha m - \frac{104\,gm}{l}\right) = 0 \tag{6}$$

siendo las frecuencias propias $\alpha_1 = \omega_1^2 = \dfrac{52\,g}{47\,l}$ y $\alpha_2 = \omega_2^2 = \dfrac{72\,g}{l}$.

Para obtener los modos propios resolvemos el sistema de la Ec. (5) para cada una de las frecuencias propias obtenidas:

$$\alpha_1 = \omega_1^2 = \frac{52\,g}{47\,l} \;\rightarrow\; \{\mathbf{a}_1\}^{\mathrm{T}} = \left(1,\, -\frac{52}{l}\right)$$
$$\alpha_2 = \omega_2^2 = \frac{72\,g}{l} \;\rightarrow\; \{\mathbf{a}_2\}^{\mathrm{T}} = \left(1,\, \frac{8}{9\,l}\right)$$

2.– Al actuar la fuerza horizontal no conservativa $F = A\,\mathrm{sen}\,\Omega t$ aplicada en B la ecuación matricial a resolver es:

$$[\mathbf{M}]\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} + [\mathbf{K}]\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -\dfrac{l}{2}\end{bmatrix} A\,\mathrm{sen}\,\Omega t = \{\mathbf{f}(t)\}$$

donde el término a la derecha del igual lo hemos obtenido a partir del trabajo virtual no conservativo $\delta W^{nc} = A\,\mathrm{sen}\,\Omega t\delta x - Al\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\Omega t\delta\theta$ particularizado en la posición de equilibrio estable.

Las fuerzas modales las obtenemos a partir de su definición:

$$\eta_1 = a_{1j}f_j(t) = 27A\,\mathrm{sen}\,\Omega t; \qquad j = 1,2 \tag{7}$$
$$\eta_2 = a_{2j}f_j(t) = \frac{5}{9}A\,\mathrm{sen}\,\Omega t; \qquad j = 1,2 \tag{8}$$

así como las masas modales:

$$M_1 = \{\mathbf{a}_1\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_1\} = 5593\,m \tag{9}$$
$$M_2 = \{\mathbf{a}_2\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_2\} = \frac{119}{81}\,m \tag{10}$$

Finalmente obtenemos las ecuaciones del movimiento en coordenadas normales:

$$\ddot{u}_1 + \frac{52\,g}{47\,l}u_1 = \frac{27}{5593\,m}\,A\,\mathrm{sen}\,\Omega t \tag{11}$$
$$\ddot{u}_2 + \frac{72\,g}{l}u_2 = \frac{45}{119\,m}\,A\,\mathrm{sen}\,\Omega t \tag{12}$$