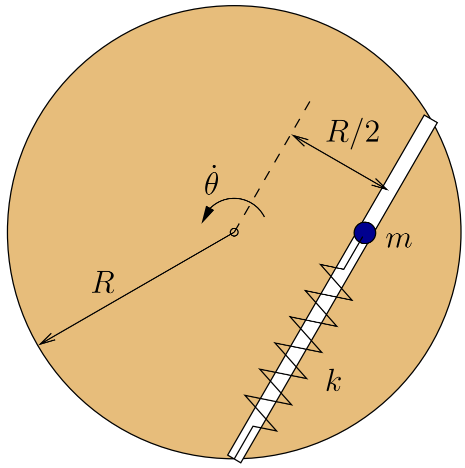
Mecánica–ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE A1 (27 de febrero de 2012)

Apellidos	*Nombre*	*N.º mat.*

Se considera un disco vertical de masa m y radio R con una ranura recta y lisa, excéntrica y situada a distancia $R/2$ del centro. Dentro de la ranura se mueve sin resistencia una partícula pesada de masa igualmente m, unida a un extremo de la ranura mediante un resorte lineal de constante k y longitud natural $R\sqrt{3}/2$. El disco tiene su centro fijo y se mantiene en un plano vertical fijo, pudiendo girar libremente alrededor de su centro. En el instante inicial la ranura se encuentra en la posición horizontal, y la partícula se encuentra en el punto medio de la ranura en reposo respecto del disco. Se considera que en el movimiento la partícula no alcanza los extremos de la ranura. Se pide:



1. Expresar las ecuaciones dinámicas que definen el movimiento del sistema.

2. Discutir la existencia de integrales primeras y en su caso obtenerlas.

3. Expresión de la reacción de la ranura sobre la partícula.

---

§1. El sistema tiene dos grados de libertad: el giro del disco alrededor de su centro fijo y la traslación de la partícula en la ranura relativa al disco. Para definirlas tomaremos θ, ángulo girado por el disco a partir de la posición inicial y s, distancia de la partícula respecto de la posición natural del resorte. Como puede comprobarse fácilmente esta posición natural es precisamente en el punto medio de la ranura.

Obtendremos las ecuaciones del movimiento aplicando los teoremas generales de Newton-Euler. Primero debemos calcular la aceleración de la partícula, cuyo movimiento puede describirse de forma relativa al del disco. Empleando unas direcciones móviles ligadas a la ranura $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$ según se indica en la figura, el vector posición es $\boldsymbol{r} = s\,\boldsymbol{t} - (R/2)\boldsymbol{n}$, mientras que la velocidad de rotación del disco es $\boldsymbol{\Omega} = \dot\theta\,\boldsymbol{k}$. De esta forma la velocidad vale

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\text{arr}} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r} + \dot s\,\boldsymbol{t} = \frac{R}{2}\dot\theta\,\boldsymbol{t} + s\dot\theta\,\boldsymbol{n} + \dot s\,\boldsymbol{t}\,. \quad (1)$$

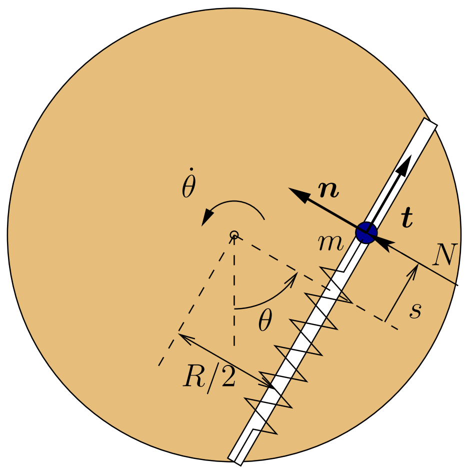


Figura 1: Coordenadas generalizadas y direcciones móviles $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$

De forma análoga la aceleración es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}) + \ddot s\,\boldsymbol{t} + 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}_{\text{rel}}\\ &= \ddot\theta\left(\frac{R}{2}\boldsymbol{t} + s\,\boldsymbol{n}\right) - \dot\theta^2\left(s\,\boldsymbol{t} - \frac{R}{2}\boldsymbol{n}\right) + \ddot s\,\boldsymbol{t} + 2\dot s\dot\theta\,\boldsymbol{n}\,.\end{aligned} \quad (2)$$

Para obtener las ecuaciones dinámicas completas podemos subdividir el sistema conjunto como la suma de dos subsistemas rígidos, correspondientes a la partícula y al disco respectivamente. Sobre cada uno de estos se definen en la figura inferior los diagramas de fuerzas actuantes.

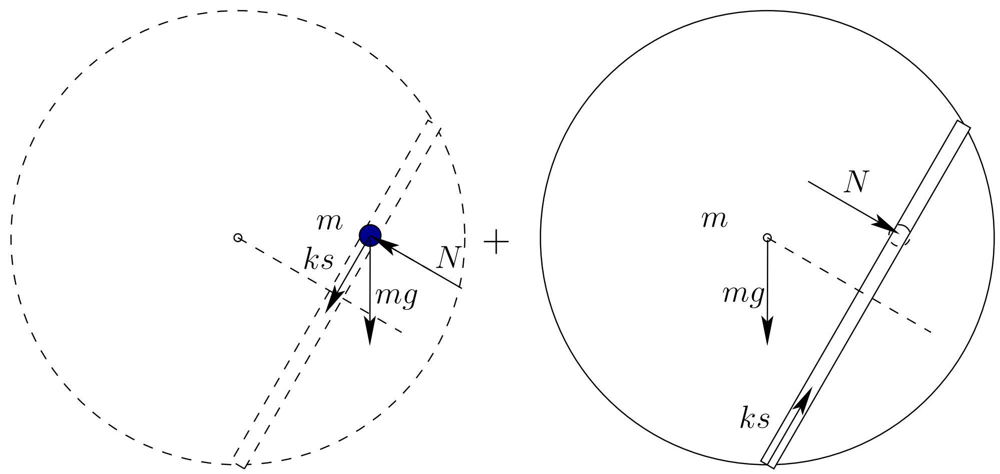


Figura 2: Descomposición en subsistemas de partícula (izquierda) y disco (derecha) con indicación de las fuerzas actuantes

Agrupando las componentes longitudinal y normal de las fuerzas y de las aceleraciones las ecuaciones dinámicas de la partícula son:

$$-ks - mg \operatorname{sen} \theta = ma_t = m\big(-s\dot{\theta}^2 + \frac{R}{2}\ddot{\theta} + \ddot{s}\big) \tag{3}$$

$$N - mg \cos \theta = ma_n = m\big(\frac{R}{2}\dot{\theta}^2 + s\ddot{\theta} + 2\dot{s}\dot{\theta}\big)\,. \tag{4}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que el momento de inercia del disco es $I_O = (1/2)mR^2$ la ecuación de la dinámica de rotación del mismo es

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} = ks\frac{R}{2} - Ns\,. \tag{5}$$

La expresión (3) es una de las ecuaciones dinámicas del movimiento, mientras que la ecuación (4) define el valor de la reacción. Despejando esta y sustituyendo en (5) se obtiene

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} = ks\frac{R}{2} - mgs\cos\theta - m\frac{R}{2}s\dot{\theta}^2 - ms^2\ddot{\theta} - 2ms\dot{s}\dot{\theta}\,, \tag{6}$$

siendo esta la segunda ecuación de la dinámica buscada.

§2. No se conserva la cantidad de movimiento ni el momento cinético, ni para cada uno de los subsistemas ni para el sistema completo. En cambio al ser todas las fuerzas conservativas y no existir movimientos impuestos sí se conserva la energía:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{1}{2}ks^2 \\ &= \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left[\big(\frac{R}{2}\dot{\theta} + \dot{s}\big)^2 + (s\dot{\theta})^2\right] + mg\big(-\frac{R}{2}\cos\theta + s\operatorname{sen}\theta\big) + \frac{1}{2}ks^2 \\ &= \frac{3}{8}mR^2\dot{\theta}_0^2 - mg\frac{R}{2}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

§3. De la ecuación (4) se deduce la expresión de la reacción normal de la ranura:

$$N = mg\cos\theta + m\big(\frac{R}{2}\dot{\theta}^2 + s\ddot{\theta} + 2\dot{s}\dot{\theta}\big)\,. \tag{8}$$

Observación: Alternativamente podrían obtenerse las ecuaciones de la dinámica a través del procedimiento de Lagrange. Para ello la expresión de la Lagrangiana es

$$L = T - V = \frac{3}{8}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}mR\dot{s}\dot{\theta} + \frac{1}{2}ms^2\dot{\theta}^2 - mg\big(-\frac{R}{2}\cos\theta + s\,\mathrm{sen}\,\theta\big) - \frac{1}{2}ks^2\,. \tag{9}$$

Las ecuaciones de Lagrange resultantes para s y θ son respectivamente

$$m\ddot{s} + \frac{1}{2}mR\ddot{\theta} = ms\dot{\theta}^2 - mg\,\mathrm{sen}\,\theta - ks \tag{10}$$

$$\frac{3}{4}mR^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mR\ddot{s} + ms^2\ddot{\theta} + 2ms\dot{s}\dot{\theta} = -mg\frac{R}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta - mgs\cos\theta\,. \tag{11}$$

La primera ecuación (10) es la misma que (3). La segunda ecuación (11) equivale a la combinación lineal de las ecuaciones (6) $-$ $(R/2)\times$ (3).