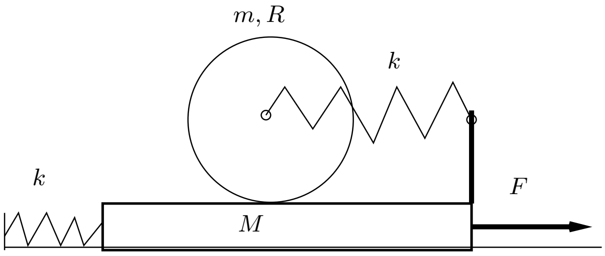
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C1 (27 de febrero de 2012)

Apellidos *Nombre* *Nº mat.*

Un bloque de masa M desliza sobre un plano liso y se encuentra unido a un muelle de rigidez k. Sobre dicho bloque actúa una fuerza horizontal constante F. Sobre la superficie superior del bloque rueda sin deslizar un disco homogéneo de radio R y masa m que a su vez se encuentra unido a un muelle de rigidez k tal y como se aprecia en la figura.

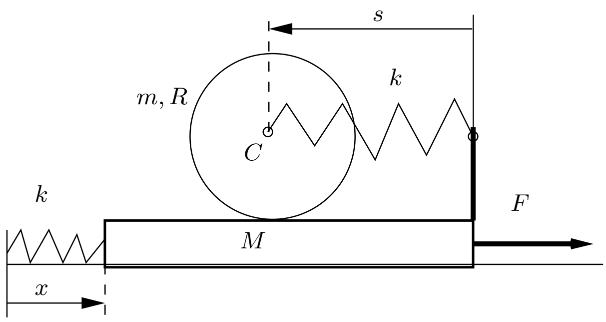


Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema.
2. Calcular las ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Discutir la existencia de integrales primeras y, en caso de existir, expresarlas.

---

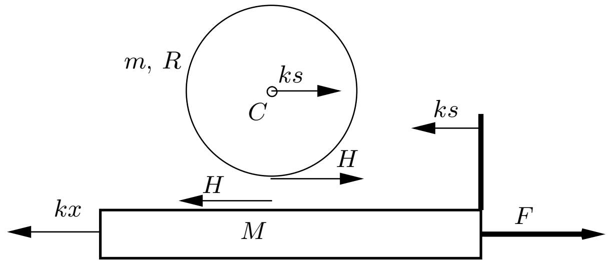
1. El sistema tiene dos grados de libertad. Podemos escoger como coordenadas generalizadas la posición horizontal del bloque x y la del disco relativa al bloque s según la figura de la derecha. La rotación θ del disco (en sentido contrario a las agujas del reloj) viene dada por la condición de rodadura sin deslizamiento. Esto es, la velocidad del punto de contacto del bloque $\dot{x}$ debe igualar a la correspondiente al disco $(\dot{x} - \dot{s}) + R\dot{\theta}$, llegándose a



$$\dot{\theta} = \dot{s}/R. \tag{1}$$

2. Calcularemos las ecuaciones diferenciales del movimiento a partir de los principios de Newton-Euler y también obteniendo las ecuaciones de Lagrange:

a) En la figura inferior se muestran las fuerzas horizontales que actúan en el bloque y en el disco. También actúan los pesos y las reacciones verticales en los contactos, pero no intervienen en las ecuaciones que vamos a plantear. Los dos sólidos se han separado a efectos de visualización para representar claramente la pareja de fuerzas iguales y de sentido contrario asociada al contacto rugoso.



Según el principio de la cantidad de movimiento horizontal del bloque podemos escribir

$$-kx - H - ks + F = M\ddot{x}. \tag{2}$$

Aplicando el mismo principio al disco tenemos

$$H + ks = m(\ddot{x} - \ddot{s}). \tag{3}$$

Además, la ecuación de balance del momento cinético del disco respecto a su centro de masa es $HR = I_C\ddot{\theta}$, siendo $I_C = mR^2/2$ la inercia polar del disco y $\ddot{\theta} = \ddot{s}/R$ según (1). Por tanto resulta

$$H = \frac{1}{2}m\ddot{s}. \tag{4}$$

Sustituyendo esta expresión de H en (2) y (3) obtenemos dos ecuaciones diferenciales que determinan la evolución del sistema:

$$\begin{cases} -kx - \dfrac{1}{2}m\ddot{s} - ks + F = M\ddot{x}, \quad \text{y} \\ \dfrac{1}{2}m\ddot{s} + ks = m(\ddot{x} - \ddot{s}). \end{cases} \tag{5}$$

b) Alternativamente podemos obtener las ecuaciones de Lagrange. La energía cinética del sistema es

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{x}^2}_{\text{Bloque}} + \underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{x} - \dot{s})^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2}_{\text{Disco}}, \tag{6}$$

siendo $I_C = mR^2/2$ la inercia polar del disco y $\dot{\theta} = \dot{s}/R$ su velocidad de rotación según ya hemos visto.

Todas las fuerzas activas derivan de un potencial. Un potencial de la fuerza constante F es $-\int_0^x F\mathrm{d}x = -Fx$. Incorporando la energía de los muelles obtenemos el potencial total

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ks^2 - Fx. \tag{7}$$

Por tanto podemos escribir la Lagrangiana como

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m\dot{s}^2 - m\dot{x}\dot{s} - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}ks^2 + Fx. \tag{8}$$

Finalmente, las ecuaciones de Lagrange resultan:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow (M + m)\ddot{x} - m\ddot{s} + kx - F = 0, \quad \text{y} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial s} = 0 \Rightarrow \dfrac{3}{2}m\ddot{s} - m\ddot{x} + ks = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Es fácil comprobar que este sistema de ecuaciones es equivalente al obtenido en (5).

3. Todas las fuerzas activas derivan de un potencial, por lo que el sistema es conservativo manteniéndose la energía mecánica total

$$E = T + V = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m\dot{s}^2 - m\dot{x}\dot{s} + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ks^2 - Fx. \tag{10}$$