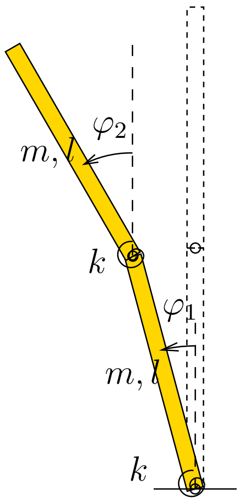
Mecánica–ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE A2 (26 de marzo de 2012)

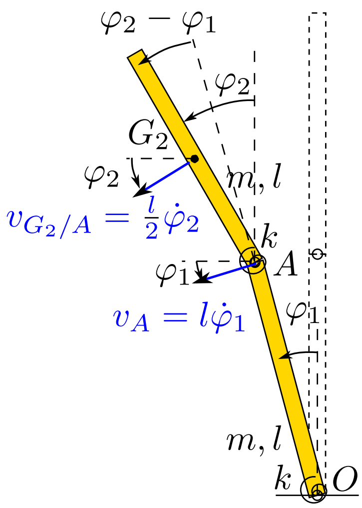
Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

El modelo estructural de una torre esbelta se puede representar de forma simplificada mediante dos barras rígidas iguales y homogéneas con masa m y longitud l, articuladas entre sí y en el apoyo en la base, existiendo una rigidez concentrada a la rotación en cada una de las uniones de valor $k = 3mgl$ (resorte rotacional de respuesta lineal en cada articulación). Se pide:



1. Calcular las expresiones de energía cinética, potencial y función lagrangiana del sistema.
2. Obtener las ecuaciones diferenciales de la dinámica en el caso más general
3. Comprobar que la posición vertical es de equilibrio estable y obtener las ecuaciones linealizadas para pequeñas oscilaciones alrededor de la misma, expresando las matrices de masa y rigidez
4. Obtener las frecuencias propias y modos normales de vibración. Para la normalización de los vectores de los modos se tomará la primera componente de cada uno de ellos igual a la unidad.

1.– La energía cinética del sistema se expresa como:



$$T = T^{\text{var1}} + T^{\text{var2}} = \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}I_{G_2}\dot{\varphi}_2^2$$
$$= \frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

donde I_O es el momento de inercia de la varilla inferior respecto del punto fijo O, I_{G_2} es el momento de inercia de la varilla superior respecto a su centro de masa G_2 y v_{G_2} es el módulo de la velocidad de dicho punto.

La energía potencial se obtiene como:

$$V = \frac{1}{2}mgl\cos\varphi_1 + mg\left(l\cos\varphi_1 + \frac{1}{2}l\cos\varphi_2\right) + \frac{1}{2}k{\varphi_1}^2 + \frac{1}{2}k(\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

Finalmente, la función lagrangiana vale:

$$L = \frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{3}{2}mgl\cos\varphi_1 - \frac{1}{2}mgl\cos\varphi_2$$
$$- k{\varphi_1}^2 - \frac{1}{2}k{\varphi_2}^2 + k\varphi_2\varphi_1$$

2.– Las ecuaciones del movimiento se obtienen a partir de la función lagrangiana. Sabiendo que no existen fuerzas no conservativas las ecuaciones quedan:

$$\frac{4}{3}\,ml^2\ddot{\varphi}_1+\frac{1}{2}\,ml^2\cos{(\varphi_2-\varphi_1)}\,\ddot{\varphi}_2-\frac{1}{2}\,ml^2\dot{\varphi}_2^2\,\mathrm{sen}\,(\varphi_2-\varphi_1)+2\,k\varphi_1-\frac{3}{2}\,mgl\,\mathrm{sen}\,\varphi_1-k\varphi_2=0$$
$$\frac{1}{2}\,ml^2\cos{(\varphi_2-\varphi_1)}\,\ddot{\varphi}_1+\frac{1}{3}\,ml^2\ddot{\varphi}_2+\frac{1}{2}\,ml^2\,\mathrm{sen}\,(\varphi_2-\varphi_1)\,\dot{\varphi}_1^2-k\varphi_1-\frac{1}{2}\,mgl\,\mathrm{sen}\,\varphi_2+k\varphi_2=0$$

3.– La posición vertical ($\varphi_1=0,\varphi_2=0$) está obviamente en equilibrio. Se puede comprobar además que el potencial es en efecto estacionario en ese punto:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\varphi_1}\right|_{(\varphi_1=0,\varphi_2=0)}=\left[-\frac{3}{2}\,mgl\,\mathrm{sen}\,\varphi_1-k\,(\varphi_2-\varphi_1)+k\varphi_1\right]_{(\varphi_1=0,\varphi_2=0)}=0$$
$$\left.\frac{\partial V}{\partial\varphi_2}\right|_{(\varphi_1=0,\varphi_2=0)}=\left[-\frac{1}{2}\,mgl\,\mathrm{sen}\,\varphi_2+k\,(\varphi_2-\varphi_1)\right]_{(\varphi_1=0,\varphi_2=0)}=0\,.$$

Para comprobar la estabilidad verificamos que la matriz hessiana particularizada en ese punto sea definida positiva (sustituimos el valor de $k=3mgl$) :

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}\right]_{(\varphi_1=0,\varphi_2=0)}=\left[\begin{array}{cc}-\frac{3}{2}\,mgl\cos\varphi_1+2\,k & -k\\ -k & -\frac{1}{2}\,mgl\cos\varphi_2+k\end{array}\right]_{(\varphi_1=0,\varphi_2=0)}=mgl\left[\begin{array}{cc}\frac{9}{2} & -3\\ -3 & \frac{5}{2}\end{array}\right]$$

siendo los menores principales de esta matriz $\frac{9}{2}mgl>0$ y $\frac{9}{4}m^2g^2l^2>0$.

Si linealizamos las ecuaciones del movimiento alrededor de la posición ($\varphi_1=0,\varphi_2=0$) y las expresamos en forma matricial obtenemos:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc}\frac{4}{3}\,ml^2 & \frac{1}{2}\,ml^2\\ \frac{1}{2}\,ml^2 & \frac{1}{3}\,ml^2\end{array}\right]}_{[\mathbf{M}]}\left\{\begin{array}{c}\ddot{\varphi}_1\\ \ddot{\varphi}_2\end{array}\right\}+\underbrace{\left[\begin{array}{cc}\frac{9}{2}\,mgl & -3\,mgl\\ -3\,mgl & \frac{5}{2}\,mgl\end{array}\right]}_{[\mathbf{K}]}\left\{\begin{array}{c}\varphi_1\\ \varphi_2\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\end{array}\right\}$$

siendo ahora φ_1 y φ_2 pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.

4.– Para obtener las frecuencias propias y los modos normales de vibración tenemos que resolver el sistema $(-\omega^2[\mathbf{M}]+[\mathbf{K}])\{\mathbf{a}\}=\{\mathbf{0}\}$, cuyo polinomio característico vale:

$$|-\omega^2[\mathbf{M}]+[\mathbf{K}]|=\left|\begin{array}{cc}\frac{9}{2}\,mgl-\frac{4}{3}\,\omega^2\,ml^2 & -3\,mgl-\frac{1}{2}\,\omega^2\,ml^2\\ -3\,mgl-\frac{1}{2}\,\omega^2\,ml^2 & \frac{5}{2}\,mgl-\frac{1}{3}\,\omega^2\,ml^2\end{array}\right|$$
$$=\frac{9}{4}\,m^2g^2l^2-\frac{47}{6}\,m^2gl^3\omega^2+\frac{7}{36}\,\omega^4m^2l^4=0$$

siendo sus raíces:

$$\omega_1^2=\frac{3}{7}\,\left(47-\sqrt{2146}\right)\frac{g}{l}=0{,}289\,\frac{g}{l}$$
$$\omega_2^2=\frac{3}{7}\,\left(47+\sqrt{2146}\right)\frac{g}{l}=39{,}996\,\frac{g}{l}$$

Los modos normales asociados a cada frecuencia propia son:

$$\{\mathbf{a}_1\}=\left\{\begin{array}{c}1{,}0\\ 1{,}308\end{array}\right\};\qquad\{\mathbf{a}_2\}=\left\{\begin{array}{c}1{,}0\\ -2{,}123\end{array}\right\}$$