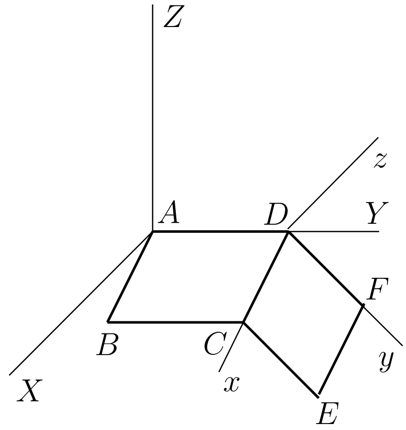
Mecánica-ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE B3 (7 de mayo de 2012)

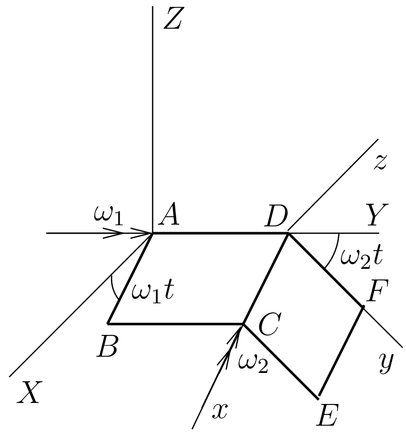
Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

El sistema de la figura está formado por dos cuadrados $ABCD$ y $DCEF$, ambos de lado a, articulados en su lado CD. El cuadrado $ABCD$ tiene su lado AD fijo, y gira alrededor del mismo con velocidad angular ω_1 constante. El cuadrado $DCEF$ gira a su vez sobre el lado DC, con velocidad angular ω_2 igualmente constante. En el instante inicial los dos cuadrados están contenidos en en el plano AXY. Se pide:

Se pide:



1. Velocidad angular del cuadrado $DCEF$ expresada en los ejes fijos $AXYZ$ y en los ejes móviles $Dxyz$, ligados a dicho cuadrado.
2. Razonar si el movimiento de $DCEF$ es un movimiento helicoidal tangente general, o una rotación instantánea. Calcular el eje instantáneo correspondiente y la velocidad de sus puntos (velocidad mínima).
3. Calcular la aceleración angular de $DCEF$, expresada en los ejes fijos y en los ejes móviles.
4. Calcular la velocidad y la aceleración de E, expresadas ambas en los ejes móviles $Dxyz$.



1. La velocidad angular es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega_1 \boldsymbol{J} - \omega_2 \boldsymbol{i} \tag{1}$$

Para expresar este vector en los ejes pedidos tenemos que conocer la expresión de $\boldsymbol{i}$ en los ejes fijos:

$$\boldsymbol{i} = \cos\omega_1 t \boldsymbol{I} - \operatorname{sen}\omega_1 t \boldsymbol{K} \tag{2}$$

y de $\boldsymbol{J}$ en los ejes móviles:

$$\boldsymbol{J} = \cos\omega_2 t \boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\omega_2 t \boldsymbol{k} \tag{3}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se obtienen las dos expresiones pedidas de la velocidad angular:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\omega_2 \boldsymbol{i} + \omega_1(\cos\omega_2 t \boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\omega_2 t \boldsymbol{k}) \tag{4}$$
$$\boldsymbol{\Omega} = -\omega_2(\cos\omega_1 t \boldsymbol{I} - \operatorname{sen}\omega_1 t \boldsymbol{K}) + \omega_1 \boldsymbol{J} \tag{5}$$

2. El movimiento de $DCEF$ es la composición de dos rotaciones que se cortan (concretamente en el punto D), por lo que se trata de una rotación instantánea. El eje instantáneo de rotación es la recta que pasa por D y es paralela al vector $\boldsymbol{\Omega}$ calculado en el apartado anterior. Por tratarse de un eje instantáneo de rotación, la velocidad de sus puntos es nula.

3. Para calcular la aceleración angular de $DCEF$ en los ejes fijos, derivamos directamente respecto del tiempo en (5):

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega_1\omega_2(\operatorname{sen}\omega_1 t\boldsymbol{I} + \cos\omega_1 t\boldsymbol{K}) \tag{6}$$

La expresión de $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ en los ejes móviles la obtenemos derivando en (4). Teniendo en cuenta que al estar ligados los ejes móviles a la placa $DCEF$, la velocidad angular de dichos ejes y la velocidad angular de la placa son iguales:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_{\text{rel}} = \omega_1\omega_2(-\operatorname{sen}\omega_2 t\boldsymbol{j} + \cos\omega_2 t\boldsymbol{k}) \tag{7}$$

4. La velocidad y la aceleración de E las calculamos con las correspondientes fórmulas del campo de velocidades y del campo de aceleraciones entre E y D, utilizando las expresiones en ejes móviles. Teniendo en cuenta las expresiones (4), (7) y que $\boldsymbol{DE} = a(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$, operando resulta:

$$\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{DE} = a\omega_1\operatorname{sen}\omega_2 t(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}) - a(\omega_2 + \omega_1\cos\omega_2 t)\boldsymbol{k} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_E &= \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{DE} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{DE}) = -a\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2\cos\omega_2 t)\boldsymbol{i} - a(\omega_2^2 + \omega_1^2\operatorname{sen}^2\omega_2 t)\boldsymbol{j}\\ &\quad + a\omega_1^2\operatorname{sen}\omega_2 t\cos\omega_2 t\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{9}$$