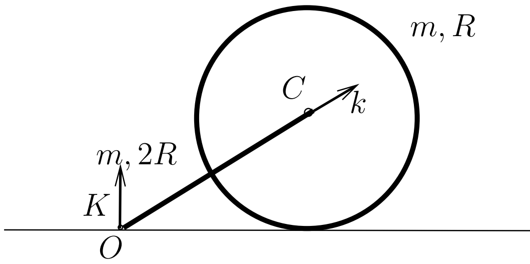
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica-ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE C4 (28 de mayo de 2012)

Apellidos	*Nombre*	*N.º mat.*

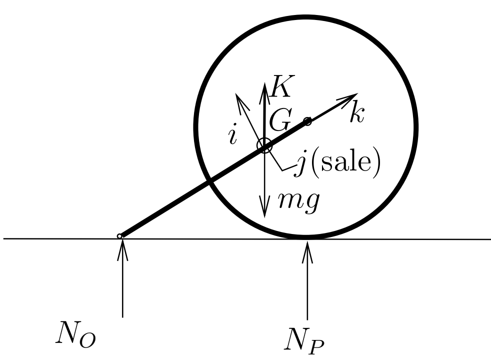
Sea un sólido rígido constituido por una esfera de radio R y masa m y una barra OC de longitud $2R$ y masa m unida al centro C de la esfera. El sólido permanece apoyado en un plano horizontal fijo y liso, de forma que puede deslizar y pivotar libremente, manteniéndose en contacto a través de la esfera y el punto O. En el instante inicial se impone al sólido una velocidad angular alrededor de su eje de revolución OC de valor $2\omega_0$. A su vez se imprime una velocidad angular alrededor de la vertical K de valor ω_0.



Se pide:

1. Estudiar las integrales primeras que existan, obteniendo la expresión de las mismas.
2. Obtener las reacciones que ejerce el plano sobre la barra y la esfera.
3. Obtener el valor de ω_0 que ocasionaría que el sólido se levantase del plano por uno de sus extremos, deduciendo cuál de los dos extremos se levantaría.

1.— Consideramos los ejes definidos por las direcciones unitarias $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ indicadas en la figura, que define un plano vertical por el eje del cono en un instante genérico del movimiento. Para describir el movimiento tomaremos, además de la posición de G, los ángulos de Euler, definidos como precesión ψ alrededor del eje $\boldsymbol{K}$ y rotación propia ϕ alrededor del eje $\boldsymbol{k}$. (En este caso no hay nutación θ alrededor del eje $\boldsymbol{j}$ debido al apoyo sobre la generatriz.) La velocidad de rotación será entonces



$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\,\boldsymbol{K} + \dot{\phi}\,\boldsymbol{k} = \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi}\,\boldsymbol{i} + \left(\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\psi}\right)\boldsymbol{k}\,. \tag{1}$$

En el instante inicial $\dot{\psi} = \omega_0$ y $\dot{\phi} = 2\omega_0$, por lo que la velocidad angular inicial será $\boldsymbol{\Omega}_0 = (\sqrt{3}/2)\omega_0\,\boldsymbol{i} + (5/2)\omega_0\,\boldsymbol{k}$. Por otra parte, los momentos principales de inercia del sólido en el centro de masas G son

$$A = I_{xx} = I_{yy} = \frac{37}{30}mR^2; \quad C = I_{zz} = \frac{2}{5}mR^2\,. \tag{2}$$

Discutimos primero las integrales primeras de conservación de momento. Las fuerzas que actúan sobre el cono son únicamente su peso mg y las reacciones del plano en O y C. Estas tres fuerzas son verticales, por lo que la proyección del momento de las fuerzas sobre esa dirección es nula y la componente correspondiente del momento cinético se conserva:

$$H_Z = \boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{K} = A\frac{3}{4}\dot{\psi} + C\left(\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\psi}\right)\frac{1}{2} = A\frac{3}{4}\omega_0 + C\frac{5}{4}\omega_0 \quad (\text{cte})\,. \tag{3}$$

Por otra parte, las fuerzas cortan al eje $(O, \boldsymbol{k})$ del cono, por lo que teniendo en cuenta la simetría de revolución del mismo conduce a que se conserve la componente del momento cinético según dicho eje:

$$H_z = \boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} = C\left(\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\psi}\right) = C\frac{5}{2}\omega_0 \quad \text{(cte)} . \tag{4}$$

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones de conservación (3) y (**??**) se deduce que las componentes de la velocidad angular son constantes:

$$\dot{\psi} = \omega_0; \quad \dot{\phi} = 2\omega_0 . \tag{5}$$

En cuanto al momento lineal y el movimiento del centro de masas G, su altura es constante debido al apoyo sobre el plano. En dirección horizontal no hay fuerzas por lo que su velocidad $\boldsymbol{v}_G$ será constante.

En relación con la energía, todas las fuerzas son conservativas y el apoyo sobre el plano es liso, por lo cual se conserva la energía:

$$E = T + V = \frac{1}{2}A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi}\right)^2 + \frac{1}{2}C\left(\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\psi}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + mgZ_G \quad \text{(cte.)} . \tag{6}$$

En cualquier caso, todas las variables que intervienen en esta expresión ya habíamos concluido que eran constantes ($\dot{\psi} = \omega_0, \dot{\phi} = 2\omega_0, v_G, Z_G$) por lo cual no aporta información adicional.

2.— La suma de las reacciones será evidentemente $N_O + N_P = 2mg$, ya que no hay movimiento vertical de G. Para determinarlas, aplicaremos el balance del momento cinético (ecuaciones de Euler). Emplearemos la referencia móvil $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ definida anteriormente, cuya velocidad de rotación es $\omega_0 \boldsymbol{K}$. (Esta referencia constituye un *triedro intermedio* que no coincide con el *triedro del cuerpo* al no seguir la rotación propia.) Para un observador en esta referencia el momento cinético $\boldsymbol{H}_G$ es constante, por lo que la derivada del mismo procede de la rotación de dicha referencia, siendo una manifestación del denominado *efecto giroscópico*. El balance del momento cinético se expresa como:

$$\boldsymbol{M}_G = \omega_0 \boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{H}_G = \omega_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right) \wedge \left(A\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\boldsymbol{i} + C\frac{5}{2}\omega_0\boldsymbol{k}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega_0^2(A - 5C)\boldsymbol{j} , \tag{7}$$

donde $\boldsymbol{M}_G = \dfrac{\sqrt{3}R}{4}(N_P - 3N_O)\boldsymbol{j}$, por lo que el valor de las reacciones resulta:

$$N_O = \frac{mg}{2} + \frac{23}{120}mR\omega_0^2 \tag{8}$$

$$N_P = \frac{3mg}{2} - \frac{23}{120}mR\omega_0^2 \tag{9}$$

3.— Según (**??**) N_P es la única reacción que puede anularse, por lo que el sólido se levantaría por el contacto de la esfera con el plano cuando $N_P = 0$, el valor de ω_0 resulta:

$$\omega_{0,\text{máx}}^2 = \frac{180}{23}\frac{g}{R} . \tag{10}$$