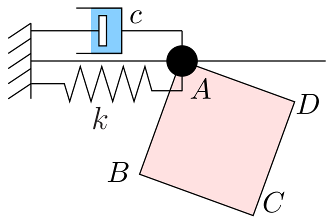
# Mecánica – ICT

PROBLEMA PUNTUABLE A2-B2-C2(19 de marzo del 2013)

*Apellidos* *Nombre* *N.º* *Grupo*

*Ejercicio* Tiempo: 60 min.

Una placa cuadrada $ABCD$, de masa $m$ y lado $2b$, está suspendida por su vértice $A$, dentro de un plano vertical, de una partícula de masa $m$. A su vez esta partícula está unida a un punto fijo a través de un resorte lineal de constante $k$ y un amortiguador viscoso de constante $c$, moviéndose en todo momento sobre una recta horizontal fija y lisa.




Se pide:

1. Identificar los grados de libertad del sistema y obtener la expresión de la Lagrangiana que incluya el efecto de las fuerzas conservativas.
2. Obtener la expresión de las fuerzas generalizadas no conservativas.
3. Expresar las ecuaciones de la dinámica y discutir la existencia de integrales primeras.

**§1.** El sistema tiene dos grados de libertad, la elongación $x$ del resorte respecto a su posición natural y el ángulo $\theta$ que forma la diagonal del cuadrado con la vertical descendente. La energía cinética es suma de la partícula y de la placa, que a su vez tiene componentes de traslación y rotación. El momento de inercia central del cuadrado es

$$I_G = \frac{1}{12}m(4b^2 + 4b^2) = \frac{2}{3}mb^2\,. \quad (1)$$

Teniendo en cuenta la velocidad del centro del cuadrado, la expresión de la energía cinética del conjunto es

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + (\sqrt{2}b\dot{\theta})^2 + 2\dot{x}\sqrt{2}b\dot{\theta}\cos\theta\big) + \frac{1}{2}\frac{2}{3}mb^2\dot{\theta}^2 = m\dot{x}^2 + \frac{4}{3}mb^2\dot{\theta}^2 + m\sqrt{2}b\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\,. \quad (2)$$

La energía potencial proviene del resorte y del peso del cuadrado:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mg\sqrt{2}b\cos\theta\,, \quad (3)$$

y la función Lagrangiana vale

$$L = T - V = m\dot{x}^2 + \frac{4}{3}mb^2\dot{\theta}^2 + m\sqrt{2}b\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2 + mg\sqrt{2}b\cos\theta\,. \quad (4)$$

**§2.** El amortiguador ejerce una fuerza no conservativa sobre la partícula de valor $F = -c\dot{x}$. El trabajo virtual que origina y consecuentemente las fuerzas generalizadas son

$$\delta W = -c\dot{x}\,\delta x \quad \Rightarrow \quad Q_x^{\text{nc}} = -c\dot{x} = F\,,\; Q_\theta^{\text{nc}} = 0\,. \quad (5)$$

**§3.** Las ecuaciones de la dinámica a partir de la Lagrangiana y las fuerzas no conservativas son

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{\mathrm{nc}}, \quad (j = x, \theta)\,. \tag{6}$$

Derivando (4) se obtienen las ecuaciones de la dinámica:

$$2m\ddot{x} + m\sqrt{2}b\ddot{\theta}\cos\theta - m\sqrt{2}b\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + kx = -c\dot{x}\,, \tag{7}$$

$$\frac{8}{3}mb^2\ddot{\theta} + m\sqrt{2}b\ddot{x}\cos\theta + mg\sqrt{2}b\operatorname{sen}\theta = 0\,. \tag{8}$$

No hay integrales primeras: ninguna de las coordenadas es cíclica, y la energía no se conserva (ni existe integral de Jacobi).