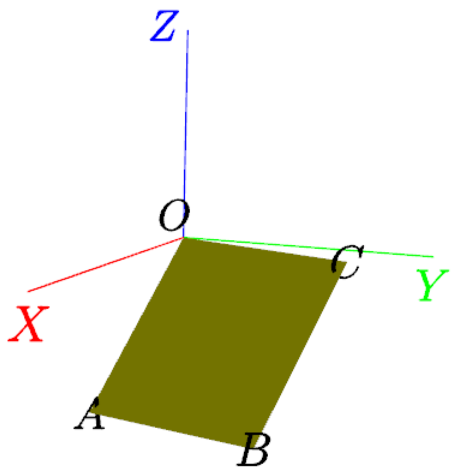
Mecánica

Problema puntuable, (20 de Mayo de 2013)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una placa cuadrada pesada de lado a y masa m se mueve de modo que uno de sus vértices está fijo en el origen O a la vez que el vértice C está obligado a permanecer en el plano OXY.
Se pide:

1. Tensor de inercia de la placa en el origen O en unos ejes ligados a la misma.
2. Velocidad angular de la placa.
3. Momento cinético de la placa en O.
4. Ecuaciones de Euler.
5. Integrales primeras del movimiento.



---

§1. Utilizaremos como eje y de la placa el eje que lleva la dirección y el sentido de OC y para eje x el correspondiente al lado OA.

En estos ejes y partiendo del momento de inercia de la varilla respecto a uno de sus extremos sabemos que el momento de inercia de la placa respecto de uno de sus lados será $\frac{1}{3}ml^2$. El momento de inercia respecto del eje z será la suma de los momentos de inercia respecto de los ejes x e y al ser la placa plana. Los productos de inercia en los que intervenga el eje z serán 0 por la misma razón y sólo puede ser no nulo el producto de inercia Pxy.

Calculando:

$$P_{xy} = \int_V xy\rho dV = \frac{1}{4}ma^2 \tag{1}$$

con lo que el tensor de inercia en O resulta:

$$I_O = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{1}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ma^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

§2. El sistema tiene dos grados de libertad. Como coordenadas generalizadas se pueden tomar, por ejemplo, el giro del lado OC alrededor del eje Z fijo, (ψ), y el giro ϕ alrededor del lado OC de la placa (eje y móvil). ψ se medirá desde el eje X fijo, mientras que ϕ se medirá desde el plano horizontal.

Utilizando unos ejes ligados a la placa, como los (x, y, z) utilizados en el apartado anterior, la velocidad angular se obtiene como la correspondiente a la suma de una rotación alrededor del eje Z de valor ψ y otra alrededor del lado OC de valor ϕ.

Por lo tanto componiendo las dos rotaciones

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\boldsymbol{K} \tag{3}$$

y proyectando el vector K sobre los ejes móviles,

$$\boldsymbol{K} = \cos\phi\boldsymbol{k} - \operatorname{sen}\phi\boldsymbol{i} \tag{4}$$

resulta:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{j} - \dot{\psi}\operatorname{sen}\phi\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\cos\phi\boldsymbol{k} \tag{5}$$

§3. El momento cinético en O, al ser un punto fijo, se obtiene multiplicando el tensor de inercia y la velocidad angular.

$$\boldsymbol{H_O} = ma^2\left(\left(-\frac{1}{3}\dot{\psi}\operatorname{sen}\phi - \frac{1}{4}\dot{\phi}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{1}{4}\dot{\psi}\operatorname{sen}\phi + \frac{1}{3}\dot{\phi}\right)\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\dot{\psi}\cos\phi\boldsymbol{k}\right) \tag{6}$$

§4. Para las ecuaciones de Euler debemos obtener el momento de las fuerzas que actúan sobre la placa respecto del punto fijo O. Aplicaremos:

$$\boldsymbol{M_O} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{H_O} \tag{7}$$

Si denominamos a la reacción del plano sobre el punto C de la placa $\boldsymbol{R_C}$ y consideramos que la reacción es normal al plano OXY el momento de la reacción y del peso respecto del origen será

$$\boldsymbol{M_O} = \left(\frac{a}{2}\boldsymbol{i} + \frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right) \wedge (-mg\boldsymbol{K}) + a\boldsymbol{j} \wedge R_c\boldsymbol{K} \tag{8}$$

que operando queda

$$\boldsymbol{M_O} = \left(R_C - \frac{1}{2}mg\right)a\cos\phi\boldsymbol{i} + \frac{a}{2}mg\cos\phi\boldsymbol{j} + \left(R_C - \frac{1}{2}mg\right)a\operatorname{sen}\phi\boldsymbol{k} \tag{9}$$

Para derivar el momento cinético tenemos en cuenta que lo tenemos expresado en una base móvil ligada al sólido por lo que su derivada se obtendra como

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{H_O} = \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{H_O}\right)_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{H_O} \tag{10}$$

utilizando para la derivada la velocidad angular de la placa.

Las ecuaciones de Euler resultan:

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{12}ma^2\left(4\ddot{\psi}\operatorname{sen}\phi + 3\ddot{\phi} + 3\dot{\psi}^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\right) &= \left(R_C - \frac{1}{2}mg\right)a\cos\phi && (11)\\
\frac{1}{12}ma^2\left(3\ddot{\psi}\operatorname{sen}\phi + 4\ddot{\phi} + 4\dot{\psi}^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\right) &= \frac{a}{2}mg\cos\phi && (12)\\
\frac{1}{12}ma^2\left(8\ddot{\psi}\cos\phi + 3\dot{\phi}^2 - 8\dot{\psi}\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi - 3\dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\phi\right) &= \left(R_C - \frac{1}{2}mg\right)a\operatorname{sen}\phi && (13)
\end{aligned}$$

§5. Como los enlaces son lisos se conserva la energía

$$T + V = cte \tag{14}$$

La energía potencial se obtiene a partir de la proyección del segmento $\boldsymbol{OG}$ sobre el eje Z obteniéndose:

$$V = -mg\frac{a}{2}\operatorname{sen}\phi \tag{15}$$

La energía cinética se obtendrá a partir del tensor de inercia de la placa en O, aprovechando que se trata de un punto fijo

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega I_O \Omega} \tag{16}$$

resultando

$$T + V = \frac{1}{12}ma^2\left(\dot{\psi}^2\left(2 + 2\cos^2\phi\right) + 2\dot{\phi}^2 + 3\dot{\psi}\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\right) - mg\frac{a}{2}\operatorname{sen}\phi \tag{17}$$

Como las fuerzas (que no pasan por O) son paralelas al eje Z fijo, se conserva la proyección del momento cinético respecto de O sobre el eje Z.

$$\boldsymbol{H_O K} = H_Z = cte. \tag{18}$$

que resulta:

$$H_Z = \frac{1}{12}ma^2\left(\dot{\psi}\left(4 + 4\cos^2\phi\right) + 3\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\right) \tag{19}$$