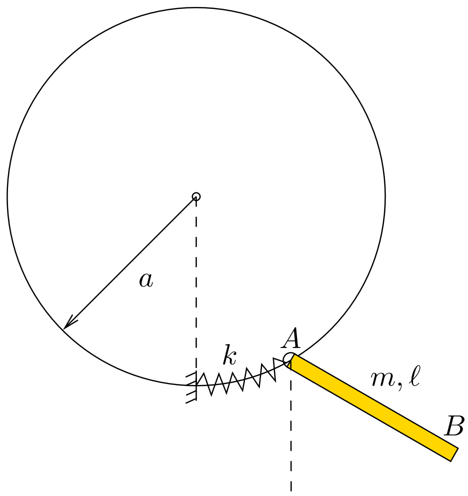
Mecánica – ICT

PROBLEMA PUNTUABLE A2 (4 de marzo del 2014)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio Tiempo: 60 min.

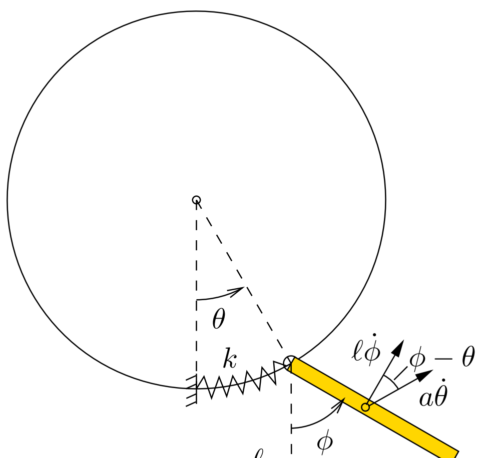
Una varilla AB de masa m y longitud ℓ se mueve dentro de un plano vertical, de forma que uno de sus extremos A está ligado a una circunferencia fija de radio a. El punto A puede deslizar libremente, sujeto a un resorte lineal de constante k y longitud natural nula, que se desarrolla sobre la circunferencia y lo une al punto más bajo de la misma. Por lo demás la varilla puede girar libremente alrededor de A, sometida a su propio peso. Se pide:



1. Elección de coordenadas libres del sistema y expresión de la Lagrangiana.
2. Ecuaciones de Lagrange de la dinámica.
3. Discutir la existencia de integrales primeras y en su caso obtener las expresiones, razonando el significado físico de las mismas.

---

§1. Tomaremos como coordenadas libres los ángulos θ y ϕ definidos en la figura adjunta. Las fuerzas son conservativas por lo que provienen de un potencial



$$V = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 - mg(a\cos\theta + \frac{\ell}{2}\cos\phi)\,. \tag{1}$$

La energía cinética vale

$$T = \frac{1}{2}m\big[(a\dot\theta)^2 + \big(\frac{\ell}{2}\dot\phi\big)^2 + a\ell\dot\theta\dot\phi\cos(\phi-\theta)\big] + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\dot\phi^2\,. \tag{2}$$

La expresión de la Lagrangiana resulta

$$L = T - V = \frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2 + \frac{1}{6}m\ell^2\dot\phi^2 + \frac{1}{2}ma\ell\dot\theta\dot\phi\cos(\phi-\theta) - \frac{1}{2}ka^2\theta^2 + mg(a\cos\theta + \frac{\ell}{2}\cos\phi) \tag{3}$$

§2. Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$0 = ma^2\ddot\theta + \frac{1}{2}ma\ell\ddot\phi\cos(\phi-\theta) - \frac{1}{2}ma\ell\dot\phi^2\,\mathrm{sen}(\phi-\theta) + ka^2\theta + mga\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{4}$$

$$0 = \frac{1}{3}m\ell^2\ddot\phi + \frac{1}{2}ma\ell\ddot\theta\cos(\phi-\theta) + \frac{1}{2}ma\ell\dot\theta^2\,\mathrm{sen}(\phi-\theta) + mg\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{5}$$

§3. La Lagrangiana depende explícitamente de las dos coordenadas, luego ninguna de ellas es cíclica. Todas las fuerzas son conservativas y los enlaces lisos, luego se conserva la energía total, que en este caso coincide con la integral de Jacobi:

$$E = T+V = \frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2+\frac{1}{6}m\ell^2\dot\phi^2+\frac{1}{2}ma\ell\dot\theta\dot\phi\cos(\phi-\theta)+\frac{1}{2}ka^2\theta^2-mg(a\cos\theta+\frac{\ell}{2}\cos\phi) = \text{cte.} \tag{6}$$