Mecánica – ICT

PROBLEMA PUNTUABLE 2 A-B-C (18 de marzo del 2014)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio Tiempo: 60 min.

Se considera un oscilador lineal con masa m y frecuencia (angular) natural sin amortiguamiento ω_0. Sobre este oscilador actúa una fuerza que se aplica gradualmente según una rampa lineal en el tiempo, con valor nulo en el instante inicial ($t = 0$) y p_0 en el instante final ($t = t_0$). En el instante inicial el sistema parte del reposo. Se pide:

1. Expresar la ecuación diferencial de la dinámica en función de las constantes citadas, y sabiendo que vale $\omega_0 = 3\pi/t_0$, obtener la solución del movimiento $x(t)$ entre $t = 0$ y t_0, calculando la posición y velocidad del oscilador en el instante t_0.

2. A partir de t_0 se activa en el sistema un amortiguamiento $\zeta = 5\,\%$ (tasa de amortiguamiento respecto al crítico), mientras que la carga se mantiene constante en el valor p_0 alcanzado. Expresar la nueva ecuación diferencial de la dinámica en esta segunda fase ($t > t_0$) y obtener la solución del movimiento.

---

§1. La fuerza en función del tiempo para la rampa vale $f(t) = p_0 t/t_0$; teniendo en cuenta que la constante del resorte es $k = m\omega_0^2$ la ecuación de la dinámica se puede expresar como

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{p_0}{m}\frac{t}{t_0}\,. \tag{1}$$

La solución general, considerando que no hay amortiguamiento, es

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \frac{p_0}{k}\frac{t}{t_0} + a\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)\,. \tag{2}$$

Se determinan las constantes (a, φ) mediante las dos condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = x(0) = a\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ 0 = \dot{x}(0) = \dfrac{p_0}{k}\dfrac{1}{t_0} + a\omega_0\cos\varphi \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \varphi = 0\,, \\ a = -\dfrac{p_0}{k}\dfrac{1}{\omega_0 t_0} = -\dfrac{p_0}{k}\dfrac{1}{3\pi}\,. \end{cases} \tag{3}$$

Con esto la solución del movimiento (2) resulta

$$x(t) = \frac{p_0}{k}\Big[\frac{t}{t_0} - \frac{1}{\omega_0 t_0}\mathrm{sen}(\omega_0 t)\Big] = \frac{p_0}{k}\Big[\frac{t}{t_0} - \frac{1}{3\pi}\mathrm{sen}(3\pi t/t_0)\Big] \tag{4}$$

y la posición y velocidad en el instante t_0 son

$$x(t_0) = \frac{p_0}{k}\,; \quad \dot{x}(t_0) = \frac{2}{t_0}\frac{p_0}{k}\,. \tag{5}$$

§2. El movimiento en esta segunda fase es la respuesta a una fuerza p_0 constante, partiendo de las condiciones iniciales del final de la fase anterior. La ecuación de la dinámica es

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{p_0}{m}\,. \tag{6}$$

La solución general es suma de la solución particular (p_0/k) y la general de la homogénea que es una vibración libre con amortiguamiento. Imponiendo las condiciones iniciales (5) se obtienen las constantes de esta solución, que expresada en función de $t' = t - t_0$ resulta

$$x(t') = \frac{p_0}{k}\left[1 + \frac{2}{\omega t_0}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t'}\,\mathrm{sen}(\omega t')\right], \tag{7}$$

En la figura 1 se muestra el movimiento resultante, tanto durante la fase inicial de la rampa (4) como en la fase posterior de mantenimiento de la carga (7). Cosiderando que la respuesta estática

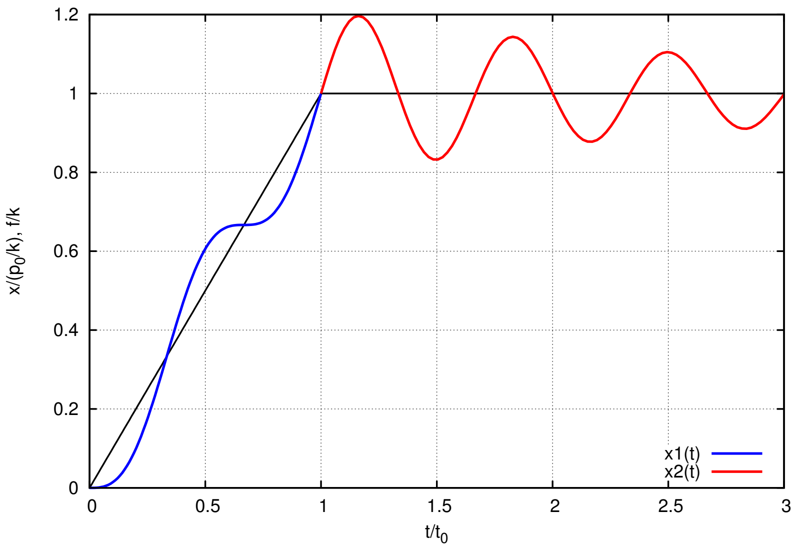
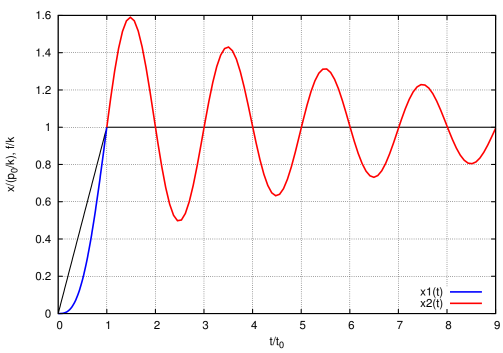


Figura 1: Fuerza aplicada y respuesta del sistema, en sus dos fases, $x_1(t)$ para $0 < t \leq t_0$ y $x_2(t)$ para $t > t_0$

sería $x_{\text{est}} = p_0/k$, se aprecia un factor de amplificación dinámica (FAD $= x_{\text{din,máx}}/x_{\text{est}}$) cercano a 1,2, y un amortiguamiento de la vibración que se estabilizaría con el tiempo en la posición estática. Si la rampa fuese más corta, el efecto dinámico se vería aumentado obteniéndose FAD mayores (figura 2), que se acercarían al valor máximo de 2 para el límite de aplicación instantánea de la carga y amortiguamiento nulo.



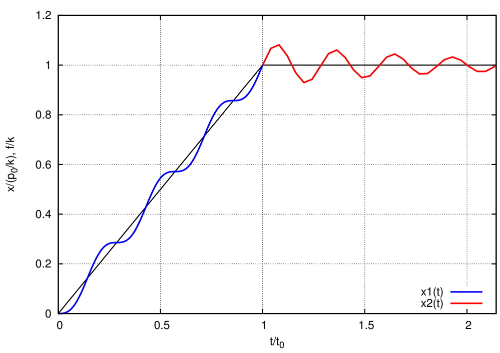


Figura 2: Respuesta para diferentes velocidades de aplicación de la carga