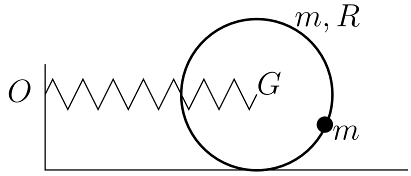
Mecánica - ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE B4 (9 de abril de 2014)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

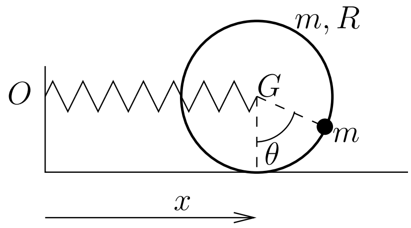
Un aro de masa m y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal fija. El aro lleva ensartada una particula de masa m que se mueve por el mismo con ligadura bilateral lisa. Asimismo el centro G del aro está unido a un punto fijo O por un muelle de constante k, como se indica en la figura.



Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Linealización de dichas ecuaciones para las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
3. Para el caso en que $k = 2mg/R$, obtener las frecuencias propias y los modos normales de oscilación.
4. Considerando igualmente que $k = 2mg/R$, expresión de las ecuaciones horarias del movimiento en función de los modos normales de oscilación y de las frecuencias propias, para unas condiciones iniciales genéricas, indicando claramente que términos dependen de dichas condiciones iniciales.

1. Con las coordenadas generalizadas que se indican en la figura: x desplazamiento de G a partir de la posición de equilibrio y θ posición respecto de la vertical del radio que une G con la partícula, se obtiene:



$$T = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}\dot{\theta}R\cos\theta \qquad (1)$$

$$V = -mgR\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (2)$$

Derivando la función lagrangiana $L = T - V$, se obtienen las ecuaciones diferenciales del movimiento:

$$3m\ddot{x} + mR\ddot{\theta}\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + kx = 0 \qquad (3)$$

$$mR\ddot{x}\cos\theta + mR^2\ddot{\theta} + mgR\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (4)$$

2. Linealizando (3) y (4) en torno a $x = 0$, $\theta = 0$ se obtienen las ecuaciones linealizadas que se piden:

$$3m\ddot{x} + mR\ddot{\theta} + kx = 0 \qquad (5)$$

$$mR\ddot{x} + mR^2\ddot{\theta} + mgR\theta = 0 \qquad (6)$$

3. Para $k = 2mg/R$ las matrices de masa $\boldsymbol{M}$ y rigidez $\boldsymbol{k}$ son:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 3m & mR \\ mR & mR^2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} \frac{2mg}{R} & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix}, \tag{7}$$

Las frecuencias propias se obtienen resolviendo la ecuación característica del problema de autovalores:

$$|-\omega^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}| = 0 \Rightarrow \qquad 2R^2\omega^4 - 5gR\omega^2 + 2g^2 = 0 \tag{8}$$

Resultando:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{2R}, \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2R}} \tag{9}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2g}{R}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{R}} \tag{10}$$

Los modos normales de oscilación se calculan resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones:

$$(-\omega_1^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K})\{\boldsymbol{a}_1\} = 0, \qquad \{\boldsymbol{a}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{R} \end{array} \right\} \tag{11}$$

$$(-\omega_2^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K})\{\boldsymbol{a}_2\} = 0, \qquad \{\boldsymbol{a}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\frac{2}{R} \end{array} \right\} \tag{12}$$

4. Las ecuaciones horarias son una combinación de los modos normales de oscilación, oscilando cada uno de ellos con la frecuencia propia correspondiente:

$$\left\{ \begin{array}{c} x(t) \\ \theta(t) \end{array} \right\} = C_1 \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{R} \end{array} \right\} \cos(\sqrt{\frac{g}{2R}}t - \delta_1) + C_2 \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\frac{2}{R} \end{array} \right\} \cos(\sqrt{\frac{2g}{R}}t - \delta_2) \tag{13}$$

Las constantes C_1, C_2, δ_1 y δ_2 se calculan a partir de las condiciones iniciales x_0, $\dot{x}_0$, θ_0 y $\dot{\theta}_0$.