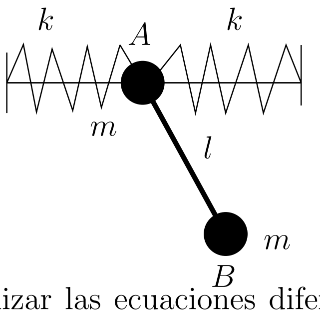
Mecánica - ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE C4 (9 de abril de 2014)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

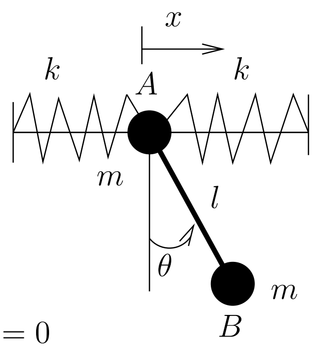
Una partícula A de masa m se mueve sobre una recta horizontal lisa. Dicha masa se encuentra unida a dos muelles de constantes respectivas k. Asimismo, otra partícula B de masa m se encuentra rígidamente unida a A una distancia l y contenida en un plano vertical.



Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.
2. Identificar una posición de equilibrio estable y linealizar las ecuaciones diferenciales en torno a dicha posición.
3. Obtener las frecuencias propias y modos propios de vibración para $k = mg/2l$.
4. Obtener la ecuación del movimiento bajo el supuesto de que la partícula A tiene un desplazamiento inicial de $(3-\sqrt{5})\,l$ sobre la recta y la partícula B, forma un ángulo inicial de $2(\sqrt{5}-2)$ con respecto a la vertical; siendo las velocidades iniciales de ambas partículas nulas.

1.- El sistema tiene dos grados de libertad, el correspondiente al desplazamiento horizontal x de la partícula A y el ángulo θ que forma la recta que une ambas partículas con respecto a la vertical. La función lagrangiana del sistema es:



$$L = T - V = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - kx^2 + mgl\cos\theta \qquad (1)$$

Las ecuaciones diferenciales del movimiento resultan:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Longrightarrow 2m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + 2kx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow ml\ddot{x}\cos\theta + ml^2\ddot{\theta} + mgl\operatorname{sen}\theta = 0$$

2.- La posición de equilibrio estable corresponde a $(x,\theta) = (0,0)$. Las ecuaciones linealizadas en torno a dicha posición son:

$$2m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + 2kx = 0 \qquad (2)$$

$$ml\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \qquad (3)$$

3.- Para $k = mg/2l$, las matrices de masa $\boldsymbol{M}$ y rigidez $\boldsymbol{K}$ resultan:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2m & ml \\ ml & ml^2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{l} & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Las frecuencias propias se obtienen resolviendo la ecuación característica del problema de autovalores:

$$|-\omega^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}| = 0 \Longrightarrow \omega^4 - 3\frac{g}{l}\omega^2 + \frac{g^2}{l^2} = 0 \tag{5}$$

resultando:

$$\omega_1^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{g}{l}, \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{6}$$

$$\omega_2^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{g}{l}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{7}$$

Para la obtención de los modos normales de vibración, se resuelve el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$(-\omega_1^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K})\{\boldsymbol{a}_1\} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \{\boldsymbol{a}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} l \\ \dfrac{2(\sqrt{5}-2)}{3-\sqrt{5}} \end{array} \right\} \tag{8}$$

$$(-\omega_2^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K})\{\boldsymbol{a}_2\} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \{\boldsymbol{a}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} l \\ \dfrac{-2(\sqrt{5}+2)}{3+\sqrt{5}} \end{array} \right\} \tag{9}$$

4.- Las ecuaciones horarias del movimiento resultan:

$$\left\{ \begin{array}{c} x(t) \\ \theta(t) \end{array} \right\} = \{\boldsymbol{a}_1\}u_1(t) + \{\boldsymbol{a}_2\}u_2(t) \tag{10}$$

siendo $u_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1)$ y $u_2(t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2)$. Es fácil comprobar que las condiciones iniciales expresadas en las coordenadas generalizadas son proporcionales al primer modo. Las condiciones iniciales expresadas en las coordenadas normales resultan: $u_{10} = (3-\sqrt{5})l$ y $\dot{u}_{10} = u_{20} = \dot{u}_{20} = 0$; por lo que las ecuaciones horarias finalmente son:

$$\left\{ \begin{array}{c} x(t) \\ \theta(t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} l(3-\sqrt{5}) \\ 2(\sqrt{5}-2) \end{array} \right\} \cos\omega_1 t \tag{11}$$