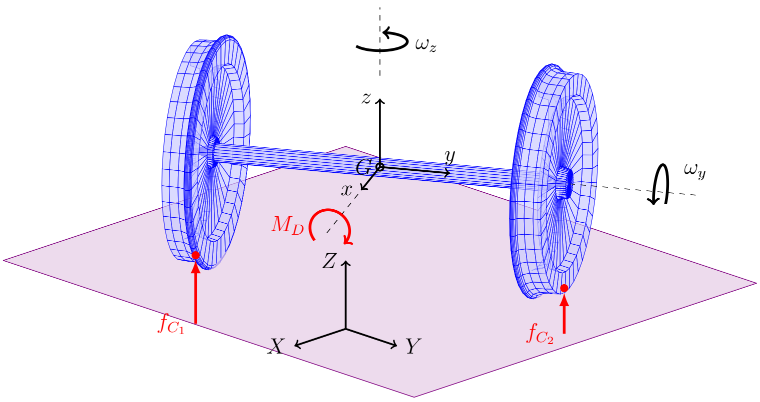
Mecánica - ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE A5 (20 de mayo de 2014)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Un eje montado ferroviario está formado por dos ruedas unidas rígida y solidariamente por un eje. Se admite que las ruedas, de masa m cada una, pueden considerarse como sendos discos planos de radio R. Asimismo el eje tiene longitud $3R$ y su masa puede despreciarse frente a las ruedas. El sólido así formado rueda y desliza de forma que la velocidad de rotación sobre su eje de revolución es ω_y, y simultáneamente tiene una velocidad de rotación ω_z alrededor del eje vertical, pudiendo considerarse que su movimiento se efectúa sobre un plano horizontal liso, en contacto por dos puntos C_1 y C_2 bajo cada rueda. El eje está sometido a su propio peso y a la reacción del plano liso sin ninguna otra fuerza aplicada. Debido a la rotación ω_z se produce un efecto giroscópico M_D que hace que una rueda se cargue más y la otra se descargue.



Se pide:

1. Expresar las ecuaciones de la dinámica del eje. Para ello:
   a) Calcular el tensor de inercia del sólido en G.
   b) Calcular el momento cinético del sólido en G.
   c) Plantear las ecuaciones cardinales de la dinámica del sólido (balance de cantidad de movimiento y de momento cinético).
2. Calcular las reacciones sobre las ruedas en C_1 y C_2. Obtener el valor necesario de ω_z para que la descarga en la rueda menos cargada sea la décima parte de la carga estática mg.

⋆

§1. Adoptamos el sistema de referencia móvil $Gxyz$, donde x (siempre horizontal) va según la dirección de rodadura normal al eje y z es siempre vertical. Este sistema sigue al sólido salvo en su rotación propia alrededor del eje de revolución y, es lo que denominamos el *triedro intermedio*. Estos ejes son por otra parte principales de inercia, y un sencillo cálculo permite obtener las componentes del tensor central de inercia:

$$[\boldsymbol{I}_G] = \begin{pmatrix} 5mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 5mR^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

La utilidad de emplear este triedro intermedio es que, al ser el sólido de revolución, el tensor de inercia se mantiene constante relativo al mismo.

La velocidad angular del sólido, expresada mediante sus componentes en este triedro, será en general $\{\boldsymbol{\Omega}\} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, aunque inmediatamente se ve que $\omega_x = 0$ ya que el eje no se levanta del plano por ninguno de los apoyos. El momento cinético valdrá entonces

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = mR^2\omega_y\boldsymbol{j} + 5mR^2\omega_z\boldsymbol{k}\,. \tag{2}$$

La ecuación de balance de cantidad de movimiento ($\boldsymbol{F} = 2m\boldsymbol{a}_G$) requiere primero evaluar las fuerzas sobre el sólido, que en este caso son únicamente su peso ($-2mg$, vertical) y las reacciones del plano liso (f_{C_1}, f_{C_2}, también verticales). En consecuencia la aceleración de G según la horizontal es nula. Según la vertical la aceleración también es nula, debido al apoyo en el plano que impide el movimiento. El movimiento horizontal será rectilíneo y constante, en función de las condiciones iniciales, mientras que en vertical se produce un equilibrio de fuerzas:

$$a_{G,x} = a_{G,y} = a_{G,z} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{G,x} = \text{cte.},\ v_{G,y} = \text{cte.},\ v_{G,z} = 0 \tag{3}$$

$$f_{C_1} + f_{C_2} = 2mg\,. \tag{4}$$

Para el balance del momento cinético se desarrolla la ecuación general $\boldsymbol{M}_G = \mathrm{d}\boldsymbol{H}_G/\mathrm{d}t$. El momento de las fuerzas es

$$\boldsymbol{M}_G = (f_{C_2} - f_{C_1})\frac{3}{2}R\,\boldsymbol{i}\,. \tag{5}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la constancia del tensor de inercia relativo al triedro intermedio tomado, cuya velocidad de rotación es $\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = \omega_z\boldsymbol{k}$, la derivada de $\boldsymbol{H}_G$ es

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{I}_G\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \wedge \boldsymbol{H}_G \\ &= mR^2\dot{\omega}_y\boldsymbol{j} + 5mR^2\dot{\omega}_z\boldsymbol{k} + \omega_z\boldsymbol{k} \wedge \left(mR^2\omega_y\boldsymbol{j} + 5mR^2\omega_z\boldsymbol{k}\right) \\ &= mR^2\dot{\omega}_y\boldsymbol{j} + 5mR^2\dot{\omega}_z\boldsymbol{k} - mR^2\omega_y\omega_z\boldsymbol{i}\,.\end{aligned} \tag{6}$$

por lo que igualando (5) y (6) las ecuaciones de balance resultan

$$(f_{C_2} - f_{C_1})\frac{3}{2}R = -mR^2\omega_y\omega_z \tag{7}$$

$$0 = mR^2\dot{\omega}_y \quad \Rightarrow \quad \omega_y = \text{cte.} \tag{8}$$

$$0 = 5mR^2\dot{\omega}_z \quad \Rightarrow \quad \omega_z = \text{cte.} \tag{9}$$

§2. En la ecuación (7) el término a la derecha del signo = es un momento inercial de tipo giroscópico, que se ve equilibrado por el momento de las reacciones a la izquierda del signo =. Entre las ecuaciones (4) y (7) se puede despejar el valor de estas reacciones,

$$\begin{aligned} f_{C_1} &= mg + \frac{1}{3}mR\omega_y\omega_z \\ f_{C_2} &= mg - \frac{1}{3}mR\omega_y\omega_z \end{aligned} \tag{10}$$

Se comprueba por tanto que el efecto giroscópico produce que el contacto en C_1 resulte más cargado mientras que C_2 queda más descargado. Para que esta descarga sea el 10 % de la carga estática la condición es

$$\frac{1}{3}mR\omega_y\omega_z = \frac{1}{10}mg \quad \Rightarrow \quad \omega_z = \frac{3}{10}\frac{g}{R\omega_y}\,. \tag{11}$$