Mecánica

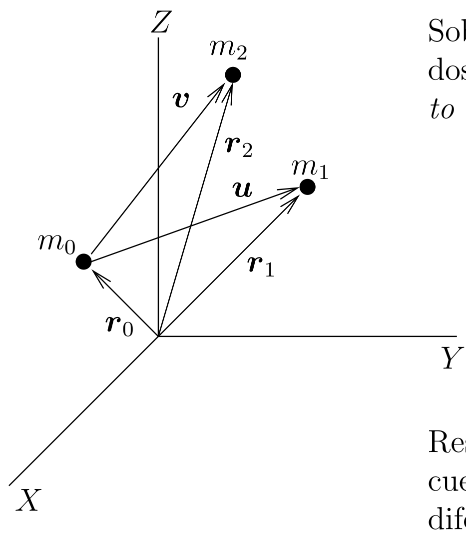
2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 5/25 ó 5/60) Tiempo: 25 min.

Responder a la siguiente cuestión teórico-práctica *dentro del espacio provisto* en la hoja. La respuesta habrá de ser breve y directa. Deberán justificarse razonadamente todos los pasos. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Sea un sistema aislado formado por tres masas (m_0, m_1, m_2), de posiciones respectivas $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$, que se atraen entre sí mediante fuerzas gravitatorias. *Deducir razonadamente* las ecuaciones dinámicas del movimiento reducidas en función de los vectores posición del movimiento relativo a m_0, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$ y $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0$. *Aplicar* al caso particular de un movimiento en que las tres masas formen en todo momento un triángulo equilátero (de lado y orientación variables), discutiendo el tipo de trayectoria que desarrollarían m_1 y m_2 en relación a m_0.



Sobre cada masa actúa la atracción gravitatoria de las otras dos. Estableciendo las expresiones dinámicas del *movimiento absoluto* de cada una de las masas se obtiene:

$$m_0\ddot{\boldsymbol{r}}_0 = \frac{Gm_0m_1}{|\boldsymbol{u}|^3}\boldsymbol{u} + \frac{Gm_0m_2}{|\boldsymbol{v}|^3}\boldsymbol{v} \tag{1}$$

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\frac{Gm_0m_1}{|\boldsymbol{u}|^3}\boldsymbol{u} + \frac{Gm_1m_2}{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|^3}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \tag{2}$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -\frac{Gm_0m_2}{|\boldsymbol{v}|^3}\boldsymbol{v} - \frac{Gm_1m_2}{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|^3}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \tag{3}$$

Restando las expresiones $(2)-(1)$ y $(3)-(1)$, y teniendo en cuenta: $\ddot{\boldsymbol{u}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_1 - \ddot{\boldsymbol{r}}_0, \quad \ddot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_0$ resultan las ecuaciones diferenciales del movimiento de m_1 y m_2 relativas a m_0:

$$\ddot{\boldsymbol{u}} = -\frac{G(m_0+m_1+m_2)}{|\boldsymbol{u}|^3}\boldsymbol{u} + Gm_2\left(\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^3} - \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^3} + \frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|^3}\right) \tag{4}$$

$$\ddot{\boldsymbol{v}} = -\frac{G(m_0+m_1+m_2)}{|\boldsymbol{v}|^3}\boldsymbol{v} - Gm_1\left(\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^3} - \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^3} + \frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|^3}\right) \tag{5}$$

Si las masas forman un triángulo equilátero de lado $a(t)$ variable con el tiempo, se verificará:

$$a(t) = |\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}| \tag{6}$$

Particularizando esta condición en las expresiones (4) y (5) se anulan los términos entre paréntesis resultando:

$$\ddot{\boldsymbol{u}} = -\frac{G(m_0+m_1+m_2)}{a(t)^3}\boldsymbol{u} \qquad \ddot{\boldsymbol{v}} = -\frac{G(m_0+m_1+m_2)}{a(t)^3}\boldsymbol{v} \tag{7}$$

Estas ecuaciones corresponden a una atracción gravitatoria desde m_0 como si fuera un punto fijo de masa $m_0 + m_1 + m_2$. Por tanto m_1 y m_2 describen elipses de foco m_0.