Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

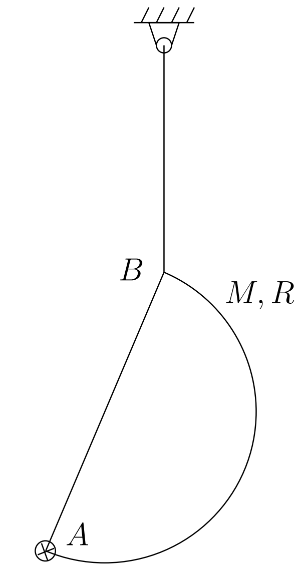
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (31 de marzo de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

Un semidisco homogéneo de masa M y radio R se halla en equilibrio colgando de un hilo por un extremo B del diámetro de borde (ver figura). Una partícula de masa igual M impacta contra el semidisco, con velocidad v_0 perpendicular al plano del mismo, en un punto A de la superficie del semidisco muy cerca del otro extremo del diámetro de borde. El coeficiente de restitución es $e = 1/2$. Se pide:

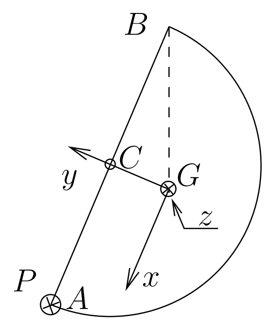


1. Razonar si, en el instante inmediatamente posterior al choque, la velocidad de un punto cualquiera del semidisco es necesariamente normal al mismo o no.
2. Calcular el movimiento del sistema (semidisco y masa) en el instante inmediatamente posterior al choque.
3. Obtener el valor de la percusión y la variación de la energía del sistema conjunto (semidisco y masa) como consecuencia del choque.

⋆

1.— El hilo soporta la placa de forma que, en el equilibrio previo al choque, el centro de gravedad G se sitúa en la vertical del mismo. El hilo no puede alargarse, por lo que impedirá el movimiento del punto B tan sólo en dirección vertical descendente, permitiendo el movimiento en las demás direcciones. Por tanto en el impacto producirá una percusión reactiva sobre el punto B de la placa tan sólo si como consecuencia de la percusión activa en A el punto B intenta adquirir una velocidad en dirección vertical descendente, que violaría la coacción del hilo.

Analizamos por tanto en primer lugar el impacto sobre la placa considerada libre, para estudiar si se produce o no percusión reactiva en el hilo. La percusión P sobre la placa, dirigida hacia dentro del papel en la figura (sentido z positivo), produce una velocidad horizontal en igual dirección y sentido del centro de masa G de la placa. Como consecuencia del impacto la placa adquiere además una velocidad de rotación $\mathbf{\Omega}$. La velocidad de B será suma de la velocidad horizontal de G y del término $\mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{GB}$, también horizontal. Concluimos por tanto que no se produce percusión reactiva en el hilo.



El momento de la percusión en G es $\boldsymbol{r}_{GA} \wedge \boldsymbol{P}$, contenido en el plano de la placa. El eje perpendicular Gz es principal de inercia de la placa, por lo que la velocidad de rotación $\mathbf{\Omega}$ producida por la percusión no tendrá componente según dicho eje, estará igualmente contenida en el plano. Por consiguiente, la velocidad de cualquier punto de la placa, $\boldsymbol{v}_G + \mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}$, es necesariamente perpendicular a la misma.

2.— El centro de masa está a la distancia $\overline{CG} = \beta R$, siendo $\beta = 4/(3\pi)$, con lo que el tensor de inercia tiene las componentes

$$[\boldsymbol{I}_G] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix};$$

$$A = MR^2\left(\frac{1}{4} - \beta^2\right); \quad B = \frac{1}{4}MR^2; \quad C = MR^2\left(\frac{1}{2} - \beta^2\right).$$

Considerando que $\boldsymbol{r}_{GA} = R\,\boldsymbol{i} + \beta R\,\boldsymbol{j}$, el balance de momento cinético en la placa resulta:

$$\boldsymbol{r}_{GA} \wedge \boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P\beta R = A\Omega_x; \\ -PR = B\Omega_y; \\ 0 = \Omega_z. \end{cases} \tag{1}$$

Sobre la placa y la partícula se producen respectivamente percusiones $(P\,\boldsymbol{k},\ -P\,\boldsymbol{k})$, por lo que el balance de cantidad de movimiento en cada una expresa:

$$P = Mv_G; \tag{2}$$

$$Mv_0 - P = Mv_1, \tag{3}$$

siendo (v_G, v_1) las velocidades respectivas del centro de masa de la placa y de la partícula después del choque.

Por último, desarrollamos la ecuación del coeficiente de restitución. Las velocidades relativas de la partícula respecto de la placa antes y después del choque son respectivamente $w^- = v_0$ y $w^+ = v_1 - v_A$. Desarrollando la expresión de restitución:

$$w^+ = -ew^- \quad \Rightarrow \quad v_1 - (v_G + \beta R\Omega_x - R\Omega_y) = -\frac{1}{2}v_0.$$

Eliminando (v_G, v_1) mediante las ecuaciones (2,3), resulta:

$$v_0 - \frac{P}{M} - \left(\frac{P}{M} + \beta R\Omega_x - R\Omega_y\right) = -\frac{1}{2}v_0. \tag{4}$$

El problema queda planteado con 3 ecuaciones $(1_1,\ 1_2,\ 4)$ y tres incógnitas (Ω_x, Ω_y, P). Resolviendo resulta:

$$P = \frac{(3/2)v_0}{\dfrac{2}{M} + \dfrac{\beta^2R^2}{A} + \dfrac{R^2}{B}} = \frac{(3/2)Mv_0}{6 + \dfrac{4}{(3\pi/4)^2 - 4}}. \tag{5}$$

Los valores de $(v_G, v_1, \Omega_x, \Omega_y)$ se obtendrían sustituyendo este valor en $(2,\ 3,\ 1_1,\ 1_2)$.

$$v_G = \frac{P}{M} = \frac{(3/2)v_0}{2 + \dfrac{M\beta^2R^2}{A} + \dfrac{MR^2}{B}} = \frac{(3/2)v_0}{6 + \dfrac{4}{(3\pi/4)^2 - 4}}; \tag{6}$$

$$v_1 = v_0 - \frac{P}{M} = v_0 - \frac{(3/2)v_0}{2 + \dfrac{M\beta^2R^2}{A} + \dfrac{MR^2}{B}} = v_0 - \frac{(3/2)v_0}{6 + \dfrac{4}{(3\pi/4)^2 - 4}}; \tag{7}$$

$$\Omega_x = \frac{P}{A}\beta R = \frac{(3/2)v_0\beta R}{\dfrac{2A}{M} + \beta^2R^2 + \dfrac{AR^2}{B}}. \tag{8}$$

$$\Omega_y = -\frac{P}{B}R = -\frac{(3/2)v_0R}{\dfrac{2B}{M} + \dfrac{B\beta^2R^2}{A} + R^2}. \tag{9}$$

3.— La energía perdida por el conjunto se puede obtener mediante la expresión

$$\Delta E = \frac{1}{2}\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{w}^{-}(1 - e) = -\frac{1}{4}Pv_0,$$

donde $\boldsymbol{I} = -P\,\boldsymbol{k}$ es la impulsión sobre la partícula. Resulta finalmente:

$$\Delta E = -\frac{(3/8)M{v_0}^2}{6 + \dfrac{4}{(3\pi/4)^2 - 4}}. \tag{10}$$

Otra forma de calcular este balance de energía habría sido evaluando directamente la diferencia:

$$\Delta E = T^+ - T^- = \frac{1}{2}M{v_1}^2 + \frac{1}{2}M{v_G}^2 + \frac{1}{2}(A{\Omega_x}^2 + B{\Omega_y}^2 + C{\Omega_z}^2) - \frac{1}{2}M{v_0}^2. \tag{11}$$

Este procedimiento da el mismo resultado, como puede comprobarse, aunque resulta bastante más trabajoso.