Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL (14 de junio de 2001)

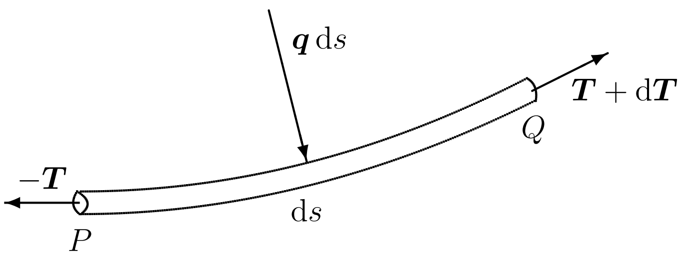
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 5/25 – 10/60) Tiempo: 30 min. – 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto* en la hoja. La respuesta habrá de ser breve y directa. Deberán justificarse razonadamente todos los pasos. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Deducir las ecuaciones de equilibrio de un hilo flexible, sometido a carga distribuidas $\boldsymbol{q}$ por unidad de longitud, obteniendo: a) expresión vectorial intrínseca; b) expresiones en coordenadas cartesianas. (5 ptos.)

a) Sea $\boldsymbol{r}(s)$ la curva directriz del hilo, con s la longitud de arco. En la figura se representa un elemento infinitésimo del mismo de longitud $\mathrm{d}s$, entre los puntos $P \equiv \boldsymbol{r}(s)$ y $Q \equiv \boldsymbol{r}(s+\mathrm{d}s)$. Denominando $\boldsymbol{T}$ a la tensión del hilo, en la sección por P (dorsal) actúa $-\boldsymbol{T}$, y en la sección por Q (frontal) $\boldsymbol{T}+\mathrm{d}\boldsymbol{T}$. El equilibrio del elemento de hilo se produce entre estas dos tensiones y la carga distribuida, de valor $\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s$:



$$-\boldsymbol{T} + (\boldsymbol{T}+\mathrm{d}\boldsymbol{T}) + \boldsymbol{q}\mathrm{d}s = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{q}\mathrm{d}s = \boldsymbol{0}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}} \tag{1}$$

Esta ecuación constituye una expresión vectorial, y por tanto *intrínseca* (independiente del sistema de coordenadas que se elija); sería un error responder en este apartado con las ecuaciones de equilibrio en el *triedro intrínseco* de la curva $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$, que obviamente no constituyen una ecuación vectorial.

Otra condición de equilibrio proviene de la anulación del momento en Q. Denominando $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \overrightarrow{PQ}$ y teniendo en cuenta que el centro de gravedad de las fuerzas aplicadas estará en un punto intermedio $\xi\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ $(0 < \xi < 1)$:

$$(-\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \wedge (-\boldsymbol{T}) - \xi\mathrm{d}\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{q}\mathrm{d}s = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}}, \tag{2}$$

donde se han despreciado los infinitésimos de 2.º orden. Esta ecuación indica que la tensión ha de ser tangente al hilo en todos los puntos, $\boldsymbol{T} = T\boldsymbol{t}$.

b) Tomaremos ahora coordenadas cartesianas (x, y, z). Teniendo en cuenta que la tangente tiene las componentes $\boldsymbol{t} \equiv (\mathrm{d}x/\mathrm{d}s, \mathrm{d}y/\mathrm{d}s, \mathrm{d}z/\mathrm{d}s)$, desarrollando (1) resultan las expresiones:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) + q_x = 0; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) + q_y = 0; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) + q_z = 0. \tag{3}$$

Se produce un choque directo entre dos sólidos rígidos, $\mathcal{B}_I$ y $\mathcal{B}_{II}$, de forma que la impulsión sobre $\mathcal{B}_I$ es $\boldsymbol{P}$, y las velocidades de sus centros de masa antes y después del choque $(\boldsymbol{v}_I^-, \boldsymbol{v}_I^+)$ y $(\boldsymbol{v}_{II}^-, \boldsymbol{v}_{II}^+)$. *Obtener* el incremento de energía que se produce para cada uno de los dos sólidos, en función de las variables anteriores. *Definir* el coeficiente de restitución e, escribiendo su expresión. *Deducir* la expresión del incremento de energía del conjunto como función de $\boldsymbol{P}$, e, y la velocidad relativa $\boldsymbol{w}^- = \boldsymbol{v}_I^- - \boldsymbol{v}_{II}^-$. (5 ptos.)

El incremento de energía en el choque proviene exclusivamente de la energía cinética, ya que en una impulsión no se produce un cambio significativo de posición ni por tanto de energía potencial. El choque directo indica que la impulsión está sobre la recta de los centros de masa, por lo que no se produce momento impulsivo respecto de los mismos y no varía la velocidad angular ni la energía cinética de rotación. La variación de energía para el cuerpo $\mathcal{B}_I$ es

$$\Delta T_I = T_I^+ - T_I^- = \frac{1}{2}m_I\left[(\boldsymbol{v}_I^+)^2 - (\boldsymbol{v}_I^-)^2\right] = \frac{1}{2}m_I(\boldsymbol{v}_I^+ + \boldsymbol{v}_I^-)\cdot(\boldsymbol{v}_I^+ - \boldsymbol{v}_I^-); \tag{4}$$

Por tanto teniendo en cuenta que la impulsión vale $\boldsymbol{P} = m_I(\boldsymbol{v}_I^+ - \boldsymbol{v}_I^-)$, y que sobre $\mathcal{B}_{II}$ la impulsión es $-\boldsymbol{P}$, resulta:

$$\boxed{\Delta T_I = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{v}_I^+ + \boldsymbol{v}_I^-); \quad \Delta T_{II} = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{P})\cdot(\boldsymbol{v}_{II}^+ + \boldsymbol{v}_{II}^-).} \tag{5}$$

El *coeficiente de restitución* se define como el «cociente, cambiado de signo, de las velocidades relativas de los puntos de impacto después y antes del choque, en la dirección de la impulsión.» Al ser el choque directo estas velocidades coinciden con las de los centros de masa de cada cuerpo. Denominando $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}/P$ al versor unitario en la dirección de la impulsión, la ecuación que expresa el coeficiente de restitución es:

$$\boxed{e = -\frac{(\boldsymbol{v}_I^+ - \boldsymbol{v}_{II}^+)\cdot\boldsymbol{u}}{(\boldsymbol{v}_I^- - \boldsymbol{v}_{II}^-)\cdot\boldsymbol{u}}.} \tag{6}$$

El incremento de energía del conjunto se obtiene sumando las dos expresiones (5) y teniendo en cuenta (6):

$$\begin{aligned}\Delta T = \Delta T_I + \Delta T_{II} &= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{v}_I^+ + \boldsymbol{v}_I^-) - \boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{v}_{II}^+ + \boldsymbol{v}_{II}^-)\right]\\ &= \frac{1}{2}P\left[\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}_I^+ - \boldsymbol{v}_{II}^+) + \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}_I^- - \boldsymbol{v}_{II}^-)\right] = \frac{1}{2}P\left[-e\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}_I^- - \boldsymbol{v}_{II}^-) + \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}_I^- - \boldsymbol{v}_{II}^-)\right];\end{aligned} \tag{7}$$

por tanto, llamando a la velocidad relativa $\boldsymbol{w}^- = \boldsymbol{v}_I^- - \boldsymbol{v}_{II}^-$, resulta

$$\boxed{\Delta T = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{w}^-(1-e).} \tag{8}$$

Esta ecuación permite relacionar el coeficiente de restitución con la pérdida de energía en el choque. El valor de e debe estar comprendido entre 0 y 1, indicando $e = 1$ choque elástico (sin pérdida de energía), y $e = 0$ choque plástico (pérdida máxima de energía). Nótese que, al llevar la impulsión $\boldsymbol{P}$ sentido opuesto a la velocidad relativa $\boldsymbol{w}^-$, su producto escalar será negativo, por lo que efectivamente se produce siempre un incremento negativo (pérdida) de energía.