ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

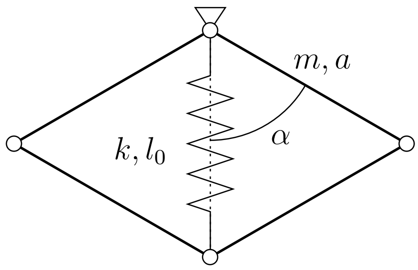
Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL (14 de junio de 2001)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

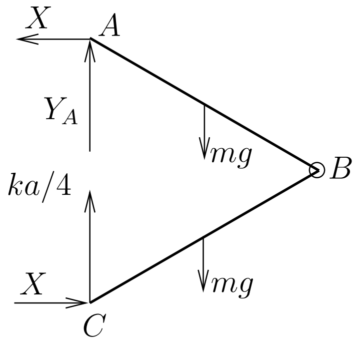
Ejercicio 2.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

a) El dispositivo de la figura adjunta está formado por cuatro barras pesadas articuladas entre sí, de longitud a y masa m cada una, de forma que están contenidas en un mismo plano vertical. El conjunto se halla sujeto por uno de sus vértices a un punto fijo. Asimismo, en la diagonal entre este vértice de anclaje y el opuesto se sitúa un resorte lineal de longitud natural $l_0 = a/2$ y constante k. Calcular el valor de k para que el sistema esté en equilibrio para $\alpha = 60°$. (5 ptos.)



⋆

El ejercicio se puede resolver de varias maneras. En primer lugar lo haremos mediante el *planteamiento clásico de equilibrio de fuerzas y momentos*. En la posición de equilibrio pedida la elongación del resorte respecto de la natural es $a/2$, por lo que la fuerza en el mismo será $ka/2$. El sistema es simétrico por lo que basta considerar una mitad del mismo. En la figura adjunta se muestran las fuerzas actuantes sobre el lado derecho. Las fuerzas verticales $(Y_A, ka/4)$ son la mitad de las totales, mientras que las horizontales $\pm X$ son autoequilibradas. Planteando que el momento en B de las fuerzas de la barra BC es nulo:



$$X\frac{a}{2} - \frac{ka}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}a + mg\frac{\sqrt{3}}{4}a = 0. \qquad (1)$$

Planteando para el conjunto de las barras AB y BC que el momento en A es nulo:

$$Xa - 2mg\frac{\sqrt{3}}{4}a = 0. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene la solución:

$$\boxed{k = \frac{4mg}{a}.}$$

Al mismo resultado se puede llegar mediante *consideraciones analíticas.* La expresión del potencial del sistema, en función del ángulo α, es:

$$V = -4mga\cos\alpha + \frac{1}{2}k\left(2a\cos\alpha - \frac{a}{2}\right)^2, \qquad (3)$$

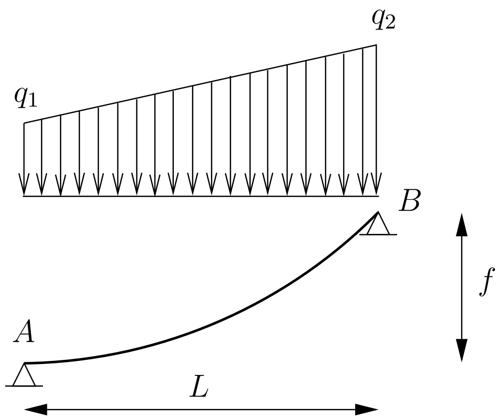
habiéndose tomado como nivel de referencia del potencial gravitatorio la horizontal por A. La condición de equilibrio se obtiene anulando la derivada de V:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4mga\,\mathrm{sen}\,\alpha + k\left(2a\cos\alpha - \frac{a}{2}\right)(-2a\,\mathrm{sen}\,\alpha) = 0. \qquad (4)$$

Imponiendo $\alpha = 60°$ en (4) y despejando k, se obtiene finalmente:

$$\boxed{k = \frac{4mg}{a}.}$$

b) Se considera un hilo AB de luz L y flecha f, cuya tangente es horizontal en el extremo A. El hilo está sometido a una carga por unidad de abscisa que varía linealmente entre los extremos A y B, tal y como se indica en la figura. A partir de las ecuaciones cartesianas de equilibrio, obtener la ecuación de la configuración de equilibrio del hilo AB. (5 ptos.)



⋆

Se consideran unos ejes cartesianos con origen en A y tales que Ax es horizontal y Ay es la vertical ascendente. La expresión en dichos ejes de la carga repartida *por unidad de abscisa* es:

$$q_x = 0; \qquad q_y = -\left(\frac{q_2 - q_1}{L}x + q_1\right). \tag{5}$$

Para obtener la carga por unidad de longitud del hilo basta multiplicar las expresiones anteriores por $\mathrm{d}x/\mathrm{d}s$. De esta forma, las ecuaciones cartesianas de equilibrio del hilo son:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right); \tag{6}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) - \left(\frac{q_2 - q_1}{L}x + q_1\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \tag{7}$$

siendo T la tensión del hilo. De (6) se deduce que la tensión horizontal del hilo es constante:

$$T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_0 \text{ (cte.)} \tag{8}$$

Sustituyendo (8) en (7) y operando se obtiene la ecuación diferencial de la configuración de equilibrio del hilo:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{T_0}\left(\frac{q_2 - q_1}{L}x + q_1\right). \tag{9}$$

Integrando (9) e imponiendo la condición de que la tangente al hilo en A es horizontal $(x = 0, y' = 0)$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{T_0}\left(\frac{q_2 - q_1}{L}\frac{x^2}{2} + q_1 x\right); \tag{10}$$

y volviendo a integrar en (10) con la condición de que el origen de los ejes cartesianos está en A $(x = 0, y = 0)$:

$$y(x) = \frac{1}{T_0}\left(\frac{q_2 - q_1}{L}\frac{x^3}{6} + q_1\frac{x^2}{2}\right). \tag{11}$$

Imponiendo ahora en (11) que para la luz L la flecha vale f, se obtiene el valor de la tensión horizontal:

$$T_0 = \frac{L^2}{6f}(q_2 + 2q_1) \tag{12}$$

Finalmente, sustituyendo (12) en (11) se obtiene la configuración de equilibrio pedida:

$$\boxed{y(x) = \frac{3f}{L^2(q_2 + 2q_1)}\left(\frac{q_2 - q_1}{L}\frac{x^3}{3} + q_1 x^2\right).} \tag{13}$$