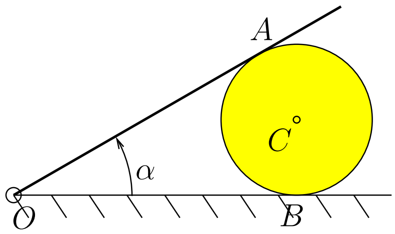
Mecánica

EXAMEN FINAL (14 de junio de 2001)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 45 min.

Un disco pesado de masa M y radio R con centro en C está contenido en un plano vertical fijo y apoyado sobre la recta horizontal OB. A su vez, una varilla pesada de masa M y longitud $4R$ tiene un extremo articulado en el punto fijo O y se apoya sobre el disco en A. El contacto del disco con la recta horizontal en B es perfectamente rugoso (rueda sin deslizar), mientras que el contacto con la varilla en A es perfectamente liso (desliza libremente). Se pide:



1. Definir el número de grados de libertad del sistema y obtener las expresiones cinemáticas de la velocidad y aceleración del centro del disco C, así como de la velocidad y aceleración angular del disco, en función del ángulo α y sus derivadas.

2. Analizando ahora la dinámica del sistema, obtener las ecuaciones que definen el movimiento del disco, así como las reacciones en A y B, empleando los teoremas generales de Newton y Euler.

⋆

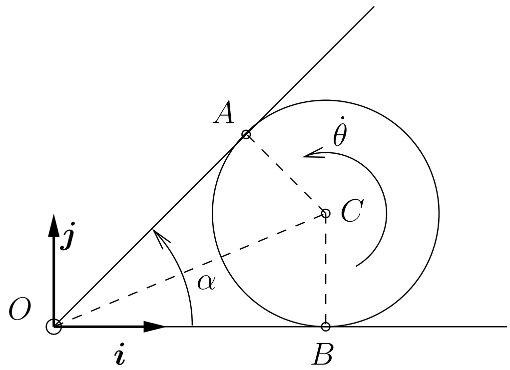
1.— El sistema claramente tiene un único grado de libertad, α. En función de él podemos expresar la abscisa del centro C del disco, medida a partir de O:

$$x_C = \frac{R}{\operatorname{tg}\alpha/2} = R\frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}. \qquad (1)$$

Derivando dos veces:

$$\dot{x}_C = -R\dot{\alpha}\frac{1}{1-\cos\alpha}; \qquad (2)$$

$$\ddot{x}_C = -R\ddot{\alpha}\frac{1}{1-\cos\alpha} + R\dot{\alpha}^2\frac{\operatorname{sen}\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}. \qquad (3)$$

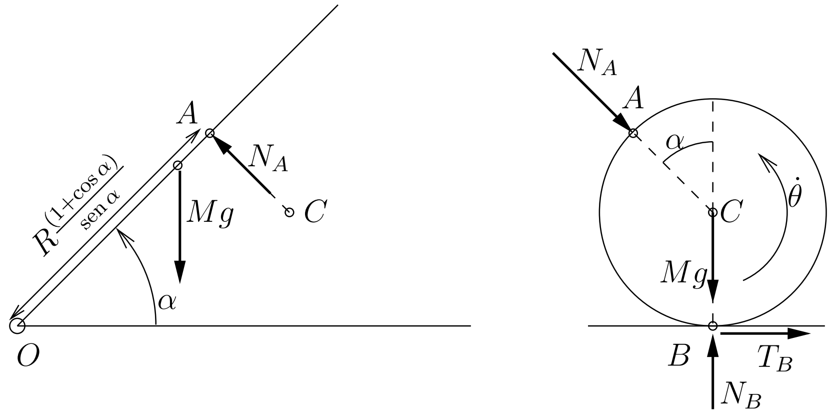


El ángulo α girado por la varilla no es el mismo que el girado por el disco, que denominaremos θ, medido en sentido antihorario. Al ser la rodadura sin deslizamiento sobre la recta horizontal se tiene:

$$\dot{x}_C = -R\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -\dot{\alpha}\frac{1}{1-\cos\alpha}; \qquad (4)$$

$$\ddot{x}_C = -R\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\ddot{\alpha}\frac{1}{1-\cos\alpha} + \dot{\alpha}^2\frac{\operatorname{sen}\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}. \qquad (5)$$

2.— Para establecer las ecuaciones de la dinámica, separamos la varilla y el disco, analizando la dinámica de cada uno de estos sólidos rígidos. Los diagramas de fuerzas pueden verse en la figura.



Planteando la ecuación de momentos en O de la varilla:

$$-Mg\cdot 2R\cos\alpha + N_A\cdot R\frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{3}M(4R)^2\ddot\alpha. \tag{6}$$

Escribimos ahora para el disco las ecuaciones de fuerzas en direcciones x e y, así como de los momentos:

$$N_A\operatorname{sen}\alpha + T_B = M\ddot x_C = -MR\ddot\alpha\frac{1}{1-\cos\alpha} + MR\dot\alpha^2\frac{\operatorname{sen}\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}; \tag{7}$$

$$-N_A\cos\alpha - Mg + N_B = M\ddot y_C = 0; \tag{8}$$

$$T_B\cdot R = I_C\ddot\theta = \frac{1}{2}MR^2\left[\frac{\ddot\alpha}{1-\cos\alpha} - \dot\alpha^2\frac{\operatorname{sen}\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}\right]. \tag{9}$$

La dinámica del sistema queda definida con las 4 ecuaciones (6), (7), (8) y (9), en función de las incógnitas $\ddot\alpha, N_A, N_B, T_B$. Despejando de éstas se obtiene el valor de $\ddot\alpha$:

$$\ddot\alpha = \frac{\frac{3}{2}\dot\alpha^2\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} - 2\frac{g}{R}\cos\alpha(1-\cos\alpha)^2}{\frac{16}{3}(1-\cos\alpha)^2 + \frac{3}{2}}$$

A partir de este valor, se calculan las reacciones incógnitas:

$$N_A = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}\,\frac{\frac{3}{2}MR\dot\alpha^2\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} + \frac{9}{16}Mg\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)^2 + \frac{9}{32}};$$

$$N_B = Mg + N_A\cos\alpha; \qquad T_B = \frac{1}{2}MR\left[\frac{\ddot\alpha}{1-\cos\alpha} - \dot\alpha^2\frac{\operatorname{sen}\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}\right].$$