Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

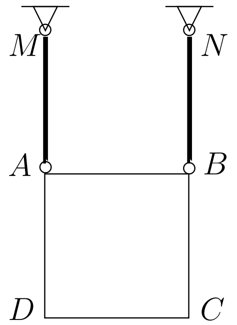
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (14 de junio de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 6.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

Una placa cuadrada $ABCD$ de lado l y masa m se encuentra unida por A y B a dos barras MA y NB de longitud l y masa despreciable. Dichas barras se encuentran articuladas en sus extremos, y tienen impedidos los movimientos de los puntos M y N. Las barras MA y NB pueden moverse dentro de un plano vertical, mientras que la placa además puede girar libremente alrededor de AB.



Se pide:

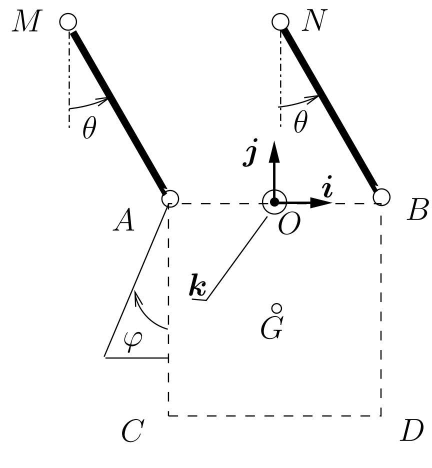
1. Definir y enumerar los grados de libertad de la placa $ABCD$. Calcular la posición del eje del movimiento helicoidal tangente de la placa, la velocidad angular y la velocidad de mínimo deslizamiento de la placa en función de los grados de libertad y sus derivadas para una posición genérica de la misma.

2. Expresión cinemática, en función de los grados de libertad y de sus derivadas, de la aceleración del centro de la placa cuando ésta se encuentra en posición horizontal y las barras están en una posición genérica.

3. Ecuaciones diferenciales del movimiento discutiendo la existencia de integrales primeras.

---

1. El movimiento de la placa $ABCD$ queda totalmente definido mediante la traslación circular de la recta AB, definida por el ángulo θ que forma la barra MA con la vertical, y una rotación alrededor de esta recta definida mediante el ángulo φ que forma la placa con la vertical. Por tanto la placa tiene dos grados de libertad, (θ, φ). Tomamos un sistema de referencia con origen en O, punto medio del lado AB, que se traslada con el mismo. El versor $\boldsymbol{i}$ coincide con la recta AB, el $\boldsymbol{j}$ con la vertical, y $\boldsymbol{k}$ es perpendicular al plano de la figura saliendo hacia fuera. La velocidad angular de la placa es por tanto $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{i}$.



El eje del movimiento helicoidal es una recta paralela a la recta AB cuya posición respecto a O se define mediante la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{OI} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_O}{\Omega^2}.$$

sabiendo que la velocidad del punto O es coincidente con la del punto A:

$$\boldsymbol{v}_O = l\dot{\theta}(\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{OI} = \frac{l\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta}{\dot{\varphi}}\,\boldsymbol{k};$$

el eje del movimiento helicoidal y la velocidad de mínimo deslizamiento resultan por tanto:

$$\boxed{\boldsymbol{\rho} = \frac{l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta}{\dot{\varphi}}\boldsymbol{k} + \lambda\,\boldsymbol{i}; \qquad v_{\min} = \boldsymbol{v}_O \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = l\dot{\theta}\cos\theta}$$

Se observa que el movimiento instantáneo es un movimiento helicoidal general, no siendo una rotación pura salvo cuando $\theta = \pi/2$.

2. La expresión general de la aceleración en G es

$$\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{OG} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OG}).$$

Tomaremos la posición horizontal de la placa con $\boldsymbol{OG} = \frac{l}{2}\boldsymbol{k}$. Operando,

$$\boldsymbol{a}_O = l\ddot{\theta}(\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{j}) - l\dot{\theta}^2(\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{i} - \cos\theta\,\boldsymbol{j})$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{OG} = \ddot{\varphi}\,\boldsymbol{i} \wedge \frac{l}{2}\boldsymbol{k} = -\ddot{\varphi}\frac{l}{2}\boldsymbol{j}; \quad \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OG}) = -\dot{\varphi}^2\frac{l}{2}\boldsymbol{k}.$$

Resulta finalmente

$$\boxed{\boldsymbol{a}_G = (l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta)\boldsymbol{i} + (l\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta - \ddot{\varphi}\frac{l}{2})\boldsymbol{j} - \dot{\varphi}^2\frac{l}{2}\boldsymbol{k}}$$

3. Obtendremos las ecuaciones de Lagrange, para lo cual debemos calcular la Lagrangiana para una posición genérica (θ, φ). La posición y velocidad de G son:

$$\boldsymbol{OG} = \frac{l}{2}(-\cos\varphi\,\boldsymbol{j} - \mathrm{sen}\,\varphi\,\boldsymbol{k}); \quad \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OG} = \frac{l}{2}\dot{\varphi}(\mathrm{sen}\,\varphi\,\boldsymbol{j} - \cos\varphi\,\boldsymbol{k});$$

$$\boldsymbol{v}_G = l\dot{\theta}\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \left(l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\boldsymbol{j} - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\,\boldsymbol{k}$$

Operando, se obtiene la energía cinética, el potencial y la Lagrangiana:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\right) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2$$

$$V = -mg\left(l\cos\theta + \frac{l}{2}\cos\varphi\right)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{3} + \dot{\theta}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\right) + mgl\left(\cos\theta + \frac{\cos\varphi}{2}\right)$$

Derivando la Lagrangiana, las ecuaciones diferenciales de la placa resultan:

$$\boxed{\begin{aligned} ml^2\left(\ddot{\theta} + \frac{\ddot{\varphi}}{2}\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\right) + mgl\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ ml^2\left(\frac{\ddot{\varphi}}{3} + \frac{\ddot{\theta}}{2}\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \frac{\dot{\theta}^2}{2}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\right) + mg\frac{l}{2}\mathrm{sen}\,\varphi = 0 \end{aligned}}$$

La única integral primera corresponde a la conservación de la energía:

$$\boxed{E = T + V = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{3} + \dot{\theta}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\right) - mgl\left(\cos\theta + \frac{\cos\varphi}{2}\right)}$$