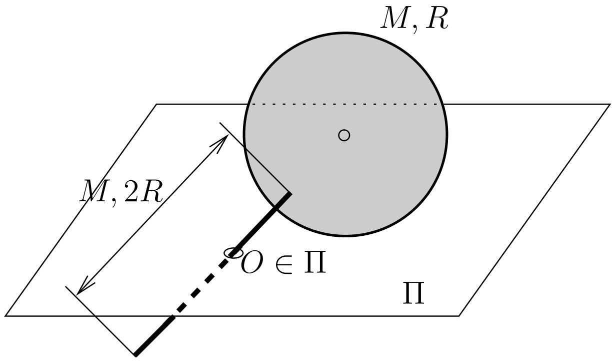
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de septiembre de 2001)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

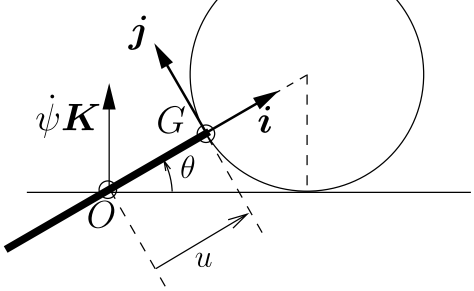
Un sólido rígido está formado por una esfera sólida de masa M y radio R y una barra de masa M y longitud $2R$, soldada por un extremo a la esfera en un punto de su superficie en dirección normal a la misma. La esfera se mueve apoyada en todo momento sobre un plano horizontal liso fijo Π, y la barra atraviesa el plano por un pequeño agujero también liso, de forma que puede entrar y salir libremente a través del mismo. Se supondrá que la barra no llega a lo largo del movimiento a salir totalmente del agujero. Se pide:



1. Expresar el tensor central de inercia $\boldsymbol{I}_G$ en ejes principales;
2. Definir claramente los grados de libertad del sistema;
3. Expresión del momento cinético del sólido en el centro de masa;
4. Expresión del momento cinético del sólido en el punto O, situado en el agujero;
5. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sólido.

---

1. El C.D.G. se encuentra en el punto de unión de la barra con la esfera. Se define el sistema de referencia $(G, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ que acompaña el movimiento de la barra (véase figura adjunta), de manera que $\boldsymbol{i}$ coincide con la dirección de la barra, $\boldsymbol{j}$ es ortogonal y se encuentra dentro del plano vertical definido por la barra y el punto de contacto de la esfera con el plano Π, y $\boldsymbol{k}$ es perpendicular al plano de la figura saliendo hacia fuera.



Con respecto a este sistema de referencia el tensor central es cilíndrico:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{2}{5}MR^2$$
$$C = \underbrace{\frac{2}{5}MR^2 + MR^2}_{\text{esfera}} + \underbrace{\frac{1}{3}M(2R)^2}_{\text{barra}} = \frac{41}{15}MR^2$$

2. El sólido formado por la esfera y la barra tiene 3 grados de libertad. En efecto, la ligadura que obliga a moverse sobre el plano Π restringe un g.d.l. y la condición de que la barra pase por un punto fijo del plano O restringe otros dos g.d.l., por lo que restan $(6-3)=3$ g.d.l.

Tomaremos estos grados de libertad como (θ, ψ) que definen la posición de la barra (véase figura anterior), y la rotación de la esfera alrededor de la misma representada mediante el ángulo φ. El ángulo θ es el que forma la barra con el plano y el ángulo ψ es el ángulo que define la proyección de la barra respecto a una dirección fija del plano.

3. Sea $\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}$ el vector normal al plano Π. La velocidad angular del sólido resulta:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} + \dot{\varphi}\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\boldsymbol{k} = (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{j} + \dot{\theta}\boldsymbol{k}$$

Por tanto, el momento cinético en G se expresa como:

$$\boxed{\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = A(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{i} + C(\dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{j} + \dot{\theta}\boldsymbol{k})}.$$

4. El momento cinético en O se calcula a través de la siguiente ecuación:

$$\boxed{\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{H}_G + \boldsymbol{r}_{OG} \wedge 2M\boldsymbol{v}_G}.$$

Denominaremos $u = |\boldsymbol{r}_{OG}|$, por lo que $\boldsymbol{r}_{OG} = u\boldsymbol{i}$, siendo $u = R\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} - 1\right)$. La velocidad del centro de masas es:

$$\boldsymbol{v}_G = \dot{u}\boldsymbol{i} + u\dot{\theta}\boldsymbol{j} - u\dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{k} = -\frac{R\dot{\theta}\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\boldsymbol{i} + u(\dot{\theta}\,\boldsymbol{j} - \dot{\psi}\cos\theta\,\boldsymbol{k}).$$

Finalmente la expresión del momento cinético resulta:

$$\boxed{\boldsymbol{H}_O = A(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{i} + \left[C + 2MR^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - 1\right)^2\right](\dot{\psi}\cos\theta\,\boldsymbol{j} + \dot{\theta}\,\boldsymbol{k})}.$$

5. La forma más conveniente de definir las ecuaciones del movimiento es mediante las tres integrales primeras que posee. En primer lugar, las fuerzas activas derivan de potencial por lo que la energía total del sistema se conserva: $T + V = E$ (cte.). Por otra parte, tanto el peso como la reacción que ejerce el plano Π sobre la esfera son verticales por lo que el momento cinético en O se conserva según la dirección vertical: $\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = H_Z$ (cte.). Por último, tanto esta reacción como el peso cortan al eje de la barra $(G, \boldsymbol{i})$ y, al tratarse de un eje de revolución, el momento cinético en O también se conserva según esta dirección: $\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{i} = H_x$ (cte.).

La expresión de estas ecuaciones es:

$$E = MR^2\frac{\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta} + \frac{1}{2}A(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta)^2 + \left[\frac{1}{2}C + MR^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - 1\right)^2\right](\dot{\psi}^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2) + 2MgR(1 - \operatorname{sen}\theta)$$

$$H_Z = \left[C + 2MR^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - 1\right)^2\right]\dot{\psi}\cos^2\theta + A\operatorname{sen}\theta(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta)$$

$$H_x = A(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta)$$