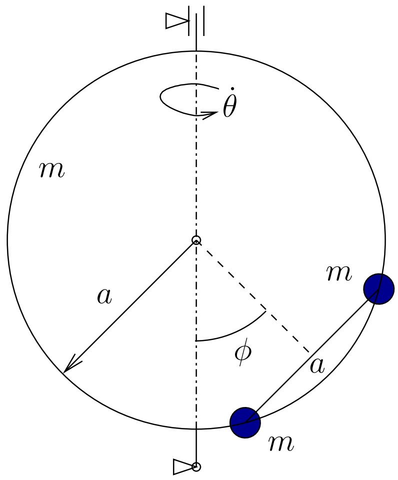
Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (22 de enero de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/25 ó 10/60) Tiempo: 60 min.

El sistema de la figura consta de dos masas puntuales m, unidas por una varilla rígida y sin masa de longitud a, y ensartadas con ligadura bilateral lisa en un aro de radio a y masa m. El aro tiene un diámetro vertical que permanece fijo, pudiendo girar alrededor del mismo. Se pide:



1. En la hipótesis de que el giro $\dot\theta$ alrededor del eje vertical sea libre: a) Ecuaciones diferenciales del movimiento y b) integrales primeras, caso de haberlas.

2. En la hipótesis de que el aro tenga una velocidad impuesta constante $\dot\theta = \omega$, a) ecuación diferencial del movimiento relativo al aro, b) valor de ω para que exista una posición de equilibrio relativo para $\phi = 30°$, y c) discutir la conservación de la energía y la existencia de integrales primeras.

1.— La energía cinética se puede calcular como

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ma^2\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\left(a^2\dot\phi^2 + a^2\dot\theta^2\operatorname{sen}^2(\phi-\pi/6)\right) + \frac{1}{2}m\left(a^2\dot\phi^2 + a^2\dot\theta^2\operatorname{sen}^2(\phi+\pi/6)\right),$$

y la energía potencial mediante

$$V = -mg\left(a\cos(\phi-\pi/6) + a\cos(\phi+\pi/6)\right).$$

Restando estas dos expresiones y simplificando, la Lagrangiana resulta:

$$L = T - V = ma^2\dot\phi^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2(1+\operatorname{sen}^2\phi) + mga\sqrt{3}\cos\phi \tag{1}$$

La ecuación de Lagrange en ϕ es

$$2ma^2\ddot\phi - ma^2\dot\theta^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi + mga\sqrt{3}\operatorname{sen}\phi = 0. \tag{2}$$

La coordenada θ es cíclica puesto que $\partial L/\partial\theta = 0$, por lo que la ecuación es

$$ma^2\dot\theta(1+\operatorname{sen}^2\phi) = \text{cte}. \tag{3}$$

Esta integral primera corresponde a la conservación del momento cinético respecto del eje vertical. La otra integral primera corresponde a la conservación de la energía:

$$E = ma^2\dot\phi^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2(1+\operatorname{sen}^2\phi) - mga\sqrt{3}\cos\phi \tag{4}$$

2.— En este caso, sustituyendo $\dot{\theta} = \omega$ en (1) la Lagrangiana es

$$L = ma^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2(1 + \operatorname{sen}^2\phi) + mga\sqrt{3}\cos\phi, \tag{5}$$

resultando la ecuación de Lagrange

$$2ma^2\ddot{\phi} - ma^2\omega^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi + mga\sqrt{3}\operatorname{sen}\phi = 0. \tag{6}$$

Para el equilibrio relativo pedido sustituimos en la anterior ecuación $\phi = 30°$, $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$, resultando

$$\omega^2 = 2\frac{g}{a}.$$

Para conseguir la velocidad ω constante es necesario aplicar al eje un momento no conservativo, por lo que ahora la energía no se conserva. Sin embargo, observamos que la Lagrangiana (5) no depende explícitamente del tiempo, por lo que existe la integral primera de Jacobi:

$$h = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - L = ma^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}ma^2\omega^2(1 + \operatorname{sen}^2\phi) - mga\sqrt{3}\cos\phi \quad \text{(cte.)}. \tag{7}$$

Esta expresión es muy similar a la de la energía (4), difiriendo de ella tan sólo en el signo del segundo término. Nótese también que la derivada de esta expresión equivale a la ecuación (6), o bien de forma equivalente que multiplicando esta ecuación (6) por $\dot{\phi}$ e integrando respecto del tiempo se obtiene una integral primera equivalente a (7).