Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

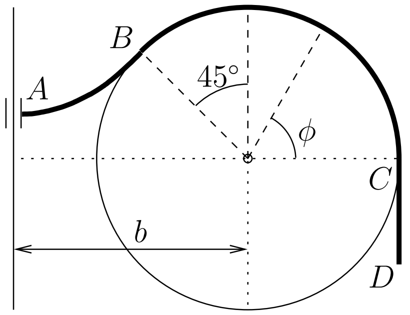
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (22 de enero de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

El hilo $ABCD$ está dispuesto de forma que el extremo A está ligado mediante una deslizadera lisa a un eje vertical fijo. El tramo BC se apoya sobre un disco liso y fijo de radio R, despegándose del mismo en el punto B situado a 45° de la vertical. La distancia entre el centro del disco y el eje vertical es $b = R\left[\sqrt{2}/2 + \ln(1+\sqrt{2})\right]$. El hilo es flexible e inextensible con peso uniforme por unidad de longitud q. Se pide:



1. Altura a la que se sitúa el punto A para la configuración de equilibrio del hilo, y valor de la tensión en los puntos A y B;

2. Tensión del hilo y reacción normal del disco sobre el mismo en los puntos del tramo BC, como función del ángulo ϕ;

3. Longitud total del hilo $ABCD$ para que la configuración de equilibrio sea la descrita.

1.— El tramo AB forma una catenaria con vértice en A, ya que aquí la tensión es horizontal necesariamente. Tomando el origen de ordenadas a la altura del centro del disco, la ecuación de la catenaria es

$$y = y_A - a + a\cosh\frac{x}{a}. \tag{1}$$

En esta expresión hay dos incógnitas, (y_A, a), que se resuelven planteando las ecuaciones que obligan respectivamente a que el punto B pertenezca a la catenaria y a que la pendiente en él sea de 45°:

$$y_B = R\frac{\sqrt{2}}{2} = y_A - a + a\cosh\frac{x_B}{a}; \tag{2}$$

$$y'_B = 1 = \operatorname{senh}\frac{x_B}{a}. \tag{3}$$

Sustituyendo $(x_B = R\ln(1+\sqrt{2}), y_B = R\sqrt{2}/2)$ en las ecuaciones anteriores resulta:

$$a = R; \quad y_A = R(1-\sqrt{2}/2). \tag{4}$$

La tensión de la catenaria en los puntos pedidos es:

$$T_A = qa = qR; \quad T_B = qa\cosh\frac{x_B}{a} = qR\sqrt{2}. \tag{5}$$

2.— Para calcular la tensión en el tramo apoyado sobre el disco, podemos aplicar la ecuación de equilibrio del hilo en dirección tangencial al mismo:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + q_t = 0.$$

Teniendo en cuenta que $q_t = -q\cos\phi$ y $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\phi$, integrando se obtiene

$$T = qR\operatorname{sen}\phi + C.$$

(NOTA: podría haberse obtenido esta ecuación también aplicando la propiedad de que, para un hilo sometido a cargas conservativas, la tensión es igual al potencial por unidad de longitud, a falta de una constante: $T = qy + C = qR\operatorname{sen}\phi + C$.)

La constante de integración C se obtiene obligando a la tensión T_B:

$$T_B = qR\sqrt{2} = C + qR\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad C = qR\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La reacción normal (por ud. de arco) se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio en esta dirección:

$$\frac{T}{R} - N + q_n = 0,$$

y teniendo en cuenta $q_n = q\operatorname{sen}\phi$,

$$N = 2q\operatorname{sen}\phi + q\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3.— La tensión en el punto C ($\phi = 0$) vale $T_C = qR\sqrt{2}/2$. Con esto podemos ya calcular la longitud de cada uno de los tramos:

$$s_{AB} = a\operatorname{senh}\frac{x_B}{a} = R; \quad s_{BC} = R\frac{3\pi}{4}; \quad s_{CD} = \frac{T_C}{q} = R\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La longitud total es por tanto

$$s_{ABCD} = R\left(1 + \frac{3\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

A continuación se muestra un gráfico con la configuración calculada del hilo: