# Mecánica

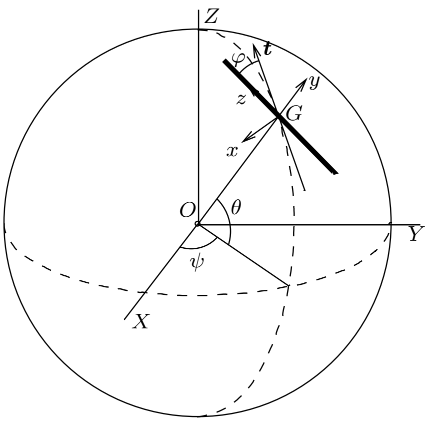
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (22 de Enero de 2002)

*Apellidos* *Nombre* *N.º* *Grupo*

*Ejercicio 6.º* (puntuación 10/60) Tiempo: 60 min.

Una varilla de masa $m$ y longitud $a$ se mueve por una esfera fija y lisa de centro $O$ y radio $a$ bajo la acción del campo gravitatorio simplificado, de manera que sus extremos están en todo momento sobre dicha esfera, sin ninguna otra restricción. Se pide:

1. Definir un conjunto de parámetros adecuados para describir la configuración del sistema.
2. Considerando un triedro móvil $Gxyz$ con origen en el centro de masas de la varilla y tal que $Gy$ va dirigido según $OG$ y $Gz$ según la varilla, expresar la velocidad angular en dichos ejes. En lo sucesivo se denominarán $p$, $q$, $r$ las componentes de dicha velocidad angular.
3. Expresión del momento cinético en $O$, en función de $p$, $q$ y $r$.
4. Ecuaciones diferenciales de Euler del movimiento de la varilla.
5. Expresión de las integrales primeras del movimiento en caso de que existan.




**1.—** El centro $G$ de la varilla se halla sobre una superficie esférica de radio $a\sqrt{3}/2$. La varilla tiene por tanto tres grados de libertad: dos que definen la posición de $G$ en esta esfera (coordenadas esféricas), y otro más que define la orientación de la varilla, que puede girar alrededor de $OG$. Denominaremos $\psi$ al ángulo de longitud correspondiente al plano meridional $OZy$ que contiene a $G$, $\theta$ al ángulo correspondiente a la latitud de $G$ y $\varphi$ al ángulo que define la orientación de la varilla en el plano tangente a la esfera en $G$, medido respecto de la dirección tangente al meridiano $\boldsymbol{t}$ (ver figura adjunta).

**2.—** Llamaremos $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ a los versores del triedro móvil definido en el enunciado y $\boldsymbol{n}$ al versor normal al plano meridional $OZy$. Este vector está contenido en el plano tangente a la esfera en $G$, de manera que $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}\}$ es un triedro ortonormal dextrógiro. La expresión de la velocidad angular es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\,\boldsymbol{K} + \dot{\theta}\,\boldsymbol{n} + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{j}, \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{K}$ el versor de la vertical ascendente $OZ$. Teniendo en cuenta las relaciones:

$$\boldsymbol{t} = -\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{n} = \cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{K} = \cos\theta\,\boldsymbol{t} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} = -\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

y sustituyendo en (1), resulta la expresión pedida:

$$\boldsymbol{\Omega} = (\underbrace{-\dot{\psi}\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi}_{p})\,\boldsymbol{i} + (\underbrace{\dot{\varphi} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta}_{q})\,\boldsymbol{j} + (\underbrace{\dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi}_{r})\,\boldsymbol{k} \tag{4}$$

**3.—** El tensor central de inercia en los ejes móviles es:

$$\boldsymbol{I}_G = \frac{1}{12}ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

El tensor de inercia en $O$ se obtiene a partir de $\boldsymbol{I}_G$ mediante la expresión:

$$\boldsymbol{I}_O = \boldsymbol{I}_G + m(OG^2\mathbf{1} - \boldsymbol{OG}\otimes\boldsymbol{OG}) \qquad \text{siendo: } \boldsymbol{OG} = a\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$$

resultando:

$$\boldsymbol{I}_O = \frac{1}{12}ma^2 \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \tag{6}$$

El momento cinético en $O$ es por tanto:

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{12}ma^2(10p\,\boldsymbol{i} + q\,\boldsymbol{j} + 9r\,\boldsymbol{k}). \tag{7}$$

**4.—** Las ecuaciones de Euler se obtienen a partir de la expresión vectorial del principio del momento cinético en $O$:

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}. \tag{8}$$

Evaluamos en primer lugar el momento de las fuerzas. Teniendo en cuenta que las reacciones en los extremos de la varilla no dan momento en $O$ por ser normales a la esfera:

$$\boldsymbol{M}_O = -\frac{\sqrt{3}}{2}mga\cos\theta\,\boldsymbol{n} = -\frac{\sqrt{3}}{2}mga\cos\theta(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{k}) \tag{9}$$

Expresando la derivada del momento cinético a partir de la derivada relativa al sistema móvil $Gxyz$, se obtiene:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{H}_O = \frac{1}{12}ma^2\left[(10\dot{p}\boldsymbol{i} + \dot{q}\boldsymbol{j} + 9\dot{r}\boldsymbol{k}) + (8qr\boldsymbol{i} + pr\boldsymbol{j} - 9pq\boldsymbol{k})\right] \tag{10}$$

Identificando las componentes en (9) y (10) se resultan las ecuaciones de Euler:

$$\begin{aligned} -6\sqrt{3}\frac{g}{a}\cos\theta\cos\varphi &= 10\dot{p} + 8qr \\ 0 &= \dot{q} + pr \\ -6\sqrt{3}\frac{g}{a}\cos\theta\operatorname{sen}\varphi &= 9\dot{r} - 9pq \end{aligned}$$

**5.—** Como la única fuerza que trabaja (el peso) es conservativa, una integral primera es la conservación de la energía:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega}) + mgZ_G \\ &= \frac{1}{24}ma^2(10p^2 + q^2 + 9r^2) + \frac{\sqrt{3}}{2}mga\operatorname{sen}\theta = \text{cte} \end{aligned}$$

Por otra parte, como todas las fuerzas cortan o son paralelas al eje $OZ$, la componente de $\boldsymbol{M}_O$ según este eje es nula, y por tanto la proyección del momento cinético $\boldsymbol{H}_O$ es constante:

$$\boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{K} = \text{cte} \quad\Rightarrow\qquad -10p\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + q\operatorname{sen}\theta + 9r\cos\theta\cos\varphi = \text{cte}. \tag{11}$$