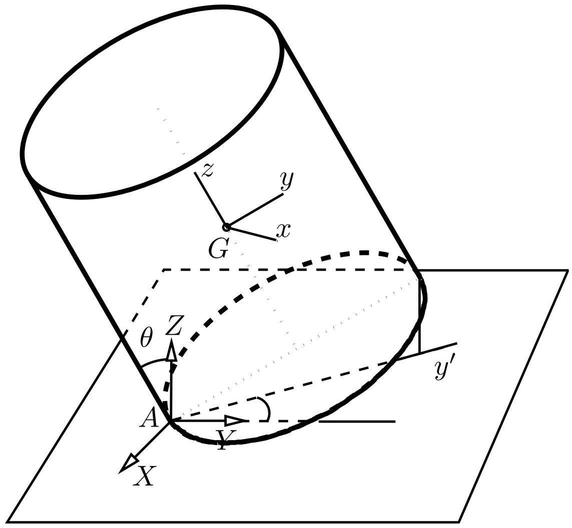
Mecánica

3.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (6 de abril de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

Un cilindro macizo de masa M, radio R y altura $3R$ se mueve con el borde de su base inferior apoyado sobre un plano horizontal liso, deslizando libremente. Se consideran el triedro de direcciones fijas $AXYZ$ (A es el punto de contacto, X, Y pertenecen al plano horizontal, y Z es vertical) y el triedro móvil $Gxyz$ (G es el centro, y según el diámetro de máxima pendiente, x según un diámetro horizontal y z según el eje de revolución del cilindro). La orientación de este triedro se realiza con los ángulos $\psi = \angle(AYy')$ y $\theta = \angle(AZz)$, (y' es la proyección sobre el plano horizontal del diametro de máxima pendiente). Se pide:



1. Tensor de inercia en G, expresando sus componentes en los ejes xyz. ¿Son constantes?.
2. Número de grados de libertad del sistema y definir claramente los parámetros escogidos para representar dichos grados de libertad.
3. Momento de las fuerzas en G en una posición genérica, considerando un valor genérico de la reacción en A.
4. Vector velocidad angular del cilindro expresado en el triedro $Gxyz$.
5. Ecuaciones dinámicas del movimiento.
6. Integrales primeras. Dejar el movimiento reducido a una cuadratura.

1.— Los ejes definidos en el enunciado, por las simetrías existentes, son principales de inercia. El tensor central de inercia es

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad A = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}M(3R)^2 = MR^2,\ C = \frac{1}{2}MR^2. \tag{1}$$

El triedro $Gxyz$ no está ligado al sólido, ya que no le sigue en su rotación alrededor de Gz. Sin embargo, al ser este eje de revolución, las componentes del tensor de inercia son constantes.

2.— El sistema tiene una única restricción, la que impone la posición en altura (Z) del cilindro de forma que su punto más bajo (A) esté en contacto con el plano. Por tanto el n.º de grados de libertad es $6-1=5$. La configuración puede representarse mediante los 3 parámetros angulares (ψ, θ, φ), quedando los dos primeros ángulos definidos en el enunciado y siendo φ la rotación propia del cilindro alrededor de su eje. Además se consideran las coordenadas (X, Y) del centro del cilindro G (según las dos direcciones fijas en el plano horizontal). La coordenada Z de dicho centro viene obligada por la ecuación de restricción

$$Z = R \operatorname{sen}\theta + \frac{3}{2} R \cos\theta. \tag{2}$$

3.— Las fuerzas exteriores sobre el cilindro son su peso $(-Mg\,\boldsymbol{K})$ aplicado en G, y la reacción del plano $(N\,\boldsymbol{K})$ aplicada en el punto de contacto A. El momento de esta fuerza en G es

$$\boldsymbol{M}_G = N\,\boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{r}_{AG} = N\,\boldsymbol{K} \wedge \left(R\,\boldsymbol{j} + \frac{3}{2} R\,\boldsymbol{k} \right) = NR \left(-\cos\theta + \frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta \right) \boldsymbol{i}. \tag{3}$$

4.— La velocidad angular resulta

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\psi\,\boldsymbol{K} + \dot\theta\,\boldsymbol{i} + \dot\varphi\,\boldsymbol{k} = \dot\theta\,\boldsymbol{i} + \dot\psi \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + (\underbrace{\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta}_{r})\boldsymbol{k}, \tag{4}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$.

5.— El momento cinético es

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = A\dot\theta\,\boldsymbol{i} + A\dot\psi \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + Cr\,\boldsymbol{k}.$$

La ecuación de balance del momento cinético se expresa teniendo en cuenta que el triedro $Gxyz$ gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = \dot\psi\,\boldsymbol{K} + \dot\theta\,\boldsymbol{i} = \boldsymbol{\Omega} - \dot\varphi\,\boldsymbol{k}$ (no está ligado al sólido, constituye el denominado *triedro intermedio*).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_G &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G\Big|_{Gxyz} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \wedge \boldsymbol{H}_G \\ &= A\ddot\theta\,\boldsymbol{i} + A(\ddot\psi \operatorname{sen}\theta + \dot\psi\dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{j} + C\dot r\,\boldsymbol{k} \\ &\qquad + \dot\psi \operatorname{sen}\theta(Cr - A\dot\psi\cos\theta)\boldsymbol{i} - \dot\theta(Cr - A\dot\psi\cos\theta)\boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{5}$$

Esta ecuación vectorial equivale a las tres ecuaciones escalares:

$$\left.\begin{aligned} NR\left(-\cos\theta + \frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta\right) &= A\ddot\theta + \dot\psi \operatorname{sen}\theta(Cr - A\dot\psi\cos\theta) \\ 0 &= A(\ddot\psi \operatorname{sen}\theta + \dot\psi\dot\theta\cos\theta) - \dot\theta(Cr - A\dot\psi\cos\theta) \\ 0 &= C\dot r \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Por otra parte, el balance de cantidad de movimiento de lugar a otras tres ecuaciones

$$\dot X = \text{cte.}; \quad \dot Y = \text{cte.} \tag{7}$$

$$N - Mg = MR\left[\ddot\theta\left(\cos\theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta\right) - \dot\theta^2\left(\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{2}\cos\theta\right)\right]. \tag{8}$$

Integrando estas seis ecuaciones se puede resolver el sistema, para los cinco grados de libertad y la reacción incógnita N.

6.— Existen 4 coordenadas cíclicas. En primer lugar las dos coordenadas horizontales (7). Por otra parte, de la ecuación $(6)_3$, $r =$ cte. Por último,

$$\boldsymbol{M}_G \cdot \boldsymbol{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{K} = A\dot{\psi}\operatorname{sen}^2\theta + Cr\cos\theta = H \quad \text{(cte.)} \tag{9}$$

Por otra parte, se conserva la energía ya que no hay fuerzas disipativas:

$$E = \frac{1}{2}M\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \frac{1}{2}\left(A\dot{\theta}^2 + A\dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\theta + Cr^2\right) + MgZ.$$

Teniendo en cuenta las constantes antes citadas de las coordenadas cíclicas, empleando la nueva constante $E' = E - \frac{1}{2}(M\dot{X}^2 + M\dot{Y}^2 + Cr^2)$, resulta

$$E' = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\left(\cos\theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{(H - Cr\cos\theta)^2}{2A\operatorname{sen}^2\theta} + MgR\left(\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{2}\cos\theta\right).$$

Esta ecuación queda expresada en función de un sólo grado de libertad, $f(\dot{\theta}, \theta) = 0$, permitiendo mediante una cuadratura resolver el movimiento.