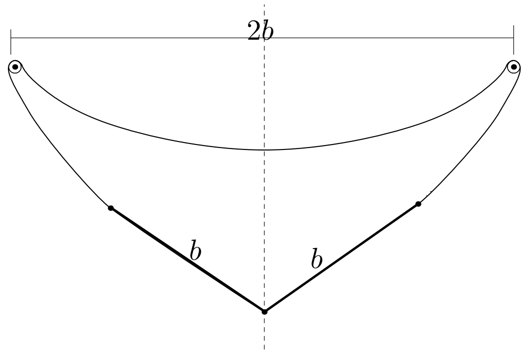
Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL – EXAMEN FINAL (7 de junio de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/25 – 10/60) Tiempo: 60 min.

Un cable $CABD$ homogéneo, de longitud (total) l a determinar, se cuelga de dos apoyos A y B situados en la misma horizontal, sobre los que puede deslizar libremente. La distancia AB es igual a $2b$ y el peso del cable por unidad de longitud vale q. En los extremos del cable se intercalan dos barras de igual longitud b y del mismo peso q por unidad de longitud, articuladas al cable y entre sí. (Son articulaciones C, D y E).

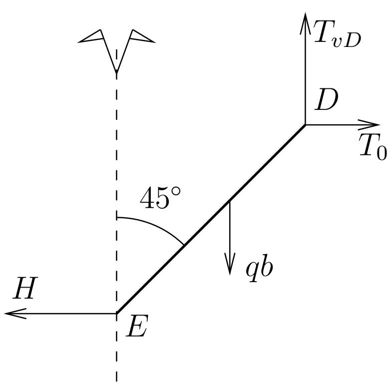


Se pide:

1. Longitud necesaria del cable l para la cual las dos barras son perpendiculares en la posición de equilibrio simétrico de la figura.
2. Tensión máxima del hilo en dicha posición.

⋆

1.— Aislando la barra ED y planteando el equilibrio de fuerzas verticales y el equilibrio de momentos en E, resulta:



$$T_{vD} - qb = 0 \qquad (1)$$

$$T_{vD}\frac{b\sqrt{2}}{2} - T_0\frac{b\sqrt{2}}{2} - qb\frac{b\sqrt{2}}{4} = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) resulta:

$$T_{vD} = qb; \quad T_0 = \frac{qb}{2} \qquad (3)$$

Considerando ahora el tramo del cable BD, de la tensión horizontal $(3)_2$ se obtiene el parámetro de esta catenaria:

$$a = \frac{T_0}{q} = \frac{b}{2}. \qquad (4)$$

Este tramo de catenaria no tiene su vértice en el eje de simetría de la figura, debido a la acción de las barras. Midiendo la abscisa de la catenaria (como es habitual) desde el vértice de la misma, de la expresión de la tensión vertical del hilo en D $(3)_2$ resulta:

$$T_{vD} = qa \operatorname{senh}\frac{x_D}{a} \quad \Rightarrow \quad 2 = \operatorname{senh}\frac{x_D}{b/2} \quad \Rightarrow \quad x_D = \frac{b}{2}\ln(2+\sqrt{5}) = 0{,}721818b \qquad (5)$$

(comprobamos que efectivamente $x_D > x_{ED} = b/\sqrt{2}$, quedando el vértice del tramo de catenaria DB queda a la izquierda de E). Como la distancia horizontal entre E y B es b, se tiene:

$$x_B - x_D + \frac{b\sqrt{2}}{2} = b \quad \Rightarrow \quad x_B = b - \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{b}{2}\ln(2+\sqrt{5}) = 1{,}01472b. \qquad (6)$$

Conociendo x_B y x_D, es inmediato obtener la longitud de la rama BD:

$$s_{BD} = \frac{b}{2}\operatorname{senh}\frac{x_B}{b/2} - \frac{b}{2}\operatorname{senh}\frac{x_D}{b/2} = \frac{b}{2}\operatorname{senh}\left(2-\sqrt{2}+\ln(2+\sqrt{5})\right) - b = 0{,}869569b. \tag{7}$$

Consideramos ahora la catenaria AB, cuyo vértice sí que se halla (por simetría) en el medio, $x'_B = b$. Igualando la tensión total en el punto B entre las catenarias AB y DB:

$$qa'\cosh\frac{x'_B}{a'} = qa\cosh\frac{x_B}{a} \tag{8}$$

Operando se obtiene una ecuación trascendente:

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\cosh\lambda - \mu = 0, \tag{9}$$

con

$$\lambda = \frac{b}{a'}, \quad \mu = \frac{1}{2}\cosh\left(\frac{x_B}{a}\right) = \frac{1}{2}\cosh\left(2-\sqrt{2}+\ln(2+\sqrt{5})\right) = 1{,}935274\,. \tag{10}$$

Esta ecuación se puede resolver numéricamente por el método de Newton. El algoritmo iterativo de dicho método es:

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{\psi(\lambda_n)}{\psi'(\lambda_n)} = \lambda_n - \frac{\frac{1}{\lambda}\cosh\lambda - \mu}{-\frac{1}{\lambda^2}\cosh\lambda + \frac{1}{\lambda}\operatorname{senh}\lambda}. \tag{11}$$

Para comenzar las iteraciones, tomaremos el valor inicial que corresponde a igualar los parámetros de ambas catenarias, $a' = a = b/2$, es decir $\lambda_0 = 1/2$. Las iteraciones arrojan

$$\lambda_1 = 0{,}59226, \lambda_2 = 0{,}61744, \lambda_3 = 0{,}61887, \lambda_4 = 0{,}61888, \lambda_5 = 0{,}61888,$$

quedándonos con este último valor, que equivale a $a' = 1{,}61583b$.

Esta catenaria AB queda por encima de la DB, lo que puede comprobarse ya que la pendiente en B es menor:

$$\operatorname{senh}\frac{x'_B}{a'} = 0{,}659145 < \operatorname{senh}\frac{x_B}{a} = 3{,}73914.$$

Podemos pensar que pudiera existir otra solución para la catenaria AB, en este caso menos tensa quedando por debajo de la catenaria DB. Para comprobar esto, buscaremos una solución numérica a la ecuación (11), empezando las iteraciones en este caso por un valor λ_0 que corresponda a ls situación en que la pendiente de ambas catenarias en B coincida:

$$\operatorname{senh}\frac{x'_B}{a'_0} = \operatorname{senh}\frac{x_B}{a} \quad\Rightarrow\quad \lambda_0 = \frac{b}{a'_0} = 2-\sqrt{2}+\ln(2+\sqrt{5}) = 2{,}02942.$$

Las iteraciones (12) en este caso arrrojan:

$$\lambda_1 = 2{,}06050, \lambda_2 = 2{,}05998, \lambda_3 = 2{,}05998,$$

por lo que resulta $a' = 0{,}485443b$. Comprobamos que efectivamente ahora la pendiente de esta catenaria es mayor que la DB, quedando por tanto debajo:

$$\operatorname{senh}\frac{x'_B}{a'} = 3{,}85916 > \operatorname{senh}\frac{x_B}{a} = 3{,}73914.$$

Conociendo el parámetro a' y x_B es inmediato obtener la longitud del tramo AB,

$$s_{AB} = 2a' \operatorname{senh} \frac{b}{a'},$$

resultando $(s_{AB})_1 = 2{,}13013b$ ó $(s_{AB})_2 = 3{,}74680b$, según la solución considerada. Por tanto, la longitud del hilo pedida es: $S_1 = 2s_{BD} + (s_{AB})_1 = 3{,}86927b$ ó $S_2 = 2s_{BD} + (s_{AB})_2 = 5{,}48594b$.

Por último, es interesante observar que de las dos soluciones posibles para el tramo AB, sólo una es estable (la de menor flecha) por lo que será la que se pueda dar en la práctica. Para estudiar este tema supongamos el tramo de cable AB sometido a un incremento de tensión $\delta T > 0$ en los extremos A y B, debido a una perturbación de la configuración de la rama $ACEDB$ que tire de la rama AB, por lo que la intentaría acortar, $\delta S_{AB} < 0$. Calculamos ahora:

$$\begin{aligned}
\delta T &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(q\frac{b}{\lambda}\cosh\lambda\right)\delta\lambda = \left(-q\frac{b}{\lambda^2}\cosh\lambda + q\frac{b}{\lambda}\operatorname{senh}\lambda\right)\delta\lambda;\\
\delta S &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(2\frac{b}{\lambda}\operatorname{senh}\lambda\right)\delta\lambda = \left(-2\frac{b}{\lambda^2}\operatorname{senh}\lambda + 2\frac{b}{\lambda}\cosh\lambda\right)\delta\lambda;\\
K &= \frac{\delta T}{\delta S} = \frac{q}{2}\frac{(-\cosh\lambda + \lambda\operatorname{senh}\lambda)}{(-\operatorname{senh}\lambda + \lambda\cosh\lambda)}
\end{aligned}$$

Se obtiene por tanto para cada una de las soluciones:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0{,}61888, & K_1 &= \frac{\delta T}{\delta S} = -4{,}8110q < 0 & &\Rightarrow \quad \boxed{\text{estable}};\\
\lambda_2 &= 2{,}05998, & K_2 &= \frac{\delta T}{\delta S} = 0{,}45520q > 0 & &\Rightarrow \quad \text{inestable}.
\end{aligned}$$

2.— La tensión máxima del hilo se tiene en el punto B. Esta tensión ya se ha expresado en (8), resultando:

$$T_B = q\frac{b}{2}\cosh\frac{1{,}01472b}{b/2} = 1{,}93527qb$$

(Es la misma para las dos soluciones del cable en el tramo AB.)