Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

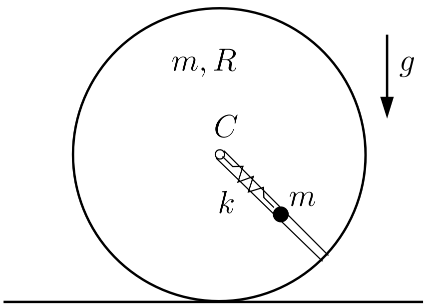
Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL (7 de junio de 2002)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

Un disco de masa m y radio R rueda sin deslizar sobre un eje horizontal, manteniéndose vertical en todo instante. Según un radio del disco existe una ranura lisa, en la cual puede moverse una masa de igual valor m sujeta al centro del disco por un resorte lineal de constante $k = mg/2R$ y longitud natural nula.

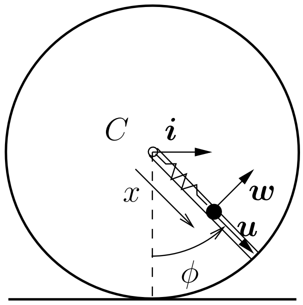


Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales que definen la dinámica;
2. Definir la posición de equilibrio estable del sistema y obtener las frecuencias propias para pequeñas oscilaciones respecto de la misma.

⋆

1.— La velocidad de la partícula, empleando las coordenadas $\{x, \phi\}$ y los versores $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\}$ (véase figura), es $\boldsymbol{v} = -\dot{\phi}R\,\boldsymbol{i} + \dot{\phi}x\,\boldsymbol{w} + \dot{x}\,\boldsymbol{u}$. La función Lagrangiana resulta



$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{\phi}^2\left(\frac{5}{2}R^2 + x^2 - 2xR\cos\phi\right) - 2\dot{x}\dot{\phi}R\,\mathrm{sen}\,\phi\right); \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mgx\cos\phi; \quad (2)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{\phi}^2\left(\frac{5}{2}R^2 + x^2 - 2xR\cos\phi\right) - 2\dot{x}\dot{\phi}R\,\mathrm{sen}\,\phi\right) - \frac{1}{2}kx^2 + mgx\cos\phi. \quad (3)$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$m\ddot{x} - m\ddot{\phi}R\,\mathrm{sen}\,\phi - m\dot{\phi}^2x + kx - mg\cos\phi = 0;$$

$$-m\ddot{x}R\,\mathrm{sen}\,\phi + m\ddot{\phi}\left(\frac{5}{2}R^2 + x^2 - 2xR\cos\phi\right) + 2mx\dot{\phi}\dot{x}$$
$$- 2m\dot{x}R\dot{\phi}\cos\phi + mxR\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\phi + mgx\,\mathrm{sen}\,\phi = 0.$$

2.— La posición de equilibrio estable se puede calcular de forma sistemática a partir de la expresión del potencial (2). Derivando se obtienen las posiciones de equilibrio:

$$\mathbf{grad}\,V = (kx - mg\cos\phi, mgx\,\mathrm{sen}\,\phi) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = mg/k,\ \phi = 0; \\ x = 0,\ \phi = \pi/2. \end{cases}$$

Mediante la matriz de derivadas segundas (Hessiano) comprobamos que sólo la primera posición es estable, correspondiente a la ranura vetical hacia abajo y el muelle elongado bajo el peso de la partícula. Analíticamente esto se comprueba inmediatamente:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} k & mg \operatorname{sen}\phi \\ mg\operatorname{sen}\phi & mgx\cos\phi \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m^2g^2/k \end{pmatrix};\ \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} k & mg \\ mg & 0 \end{pmatrix},$$

siendo $\mathbf{H}_1$ definida positiva pero no $\mathbf{H}_2$.

Para estudiar las pequeñas oscilaciones se debe linealizar respecto a la posición de equilibrio $x = mg/k$, por lo que se realiza un cambio de variable en las ecuaciones del movimiento $x = mg/k + y$, siendo y pequeño:

$$\begin{aligned} & m\ddot{y} - m\ddot{\phi}R\operatorname{sen}\phi + (k - m\dot{\phi}^2)\left(\frac{mg}{k} + y\right) - mg\cos\phi = 0; \\ & - m\ddot{y}R\operatorname{sen}\phi + m\ddot{\phi}\left(\frac{5}{2}R^2 + \left(\frac{mg}{k} + y\right)^2 - 2\left(\frac{mg}{k} + y\right)R\cos\phi\right) + 2m\left(\frac{mg}{k} + y\right)\dot{\phi}\dot{y} \\ & \qquad - 2m\dot{y}R\dot{\phi}\cos\phi + m\left(\frac{mg}{k} + y\right)R\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi + m\left(\frac{mg}{k} + y\right)g\operatorname{sen}\phi = 0. \end{aligned}$$

Ahora ya se pueden linealizar directamente estas ecuaciones para $\{y, \phi, \dot{y}, \dot{\phi}, \ddot{y}, \ddot{\phi}\}$ pequeños:

$$\begin{gathered} m\ddot{y} + ky = 0; \\ \left(\frac{5}{2}mR^2 + \frac{m^3g^2}{k^2} - \frac{2Rm^2g}{k}\right)\ddot{\phi} + \frac{m^2g^2}{k}\phi = 0 \end{gathered}$$

Se comprueba que resultan dos ecuaciones desacopladas, obteniéndose (trivialmente) las frecuencias propias como

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2kmg^2}{5k^2R^2 + 2m^2g^2 - 4kRmg}}.}$$