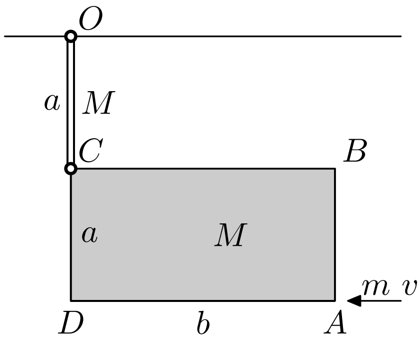
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

# Mecánica

EXAMEN FINAL (7 de junio de 2002)

*Apellidos* *Nombre* *N.º* *Grupo*

*Ejercicio 3.º* (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.




Un rectángulo $ABCD$ de lados $a$ y $b$ y masa $M$ se encuentra situado sobre un plano liso horizontal y está unido mediante una varilla biarticulada $CO$ de longitud $a$ y masa $M$ a un punto fijo $O$ del plano. Inicialmente la varilla se encuentra alineada con el lado $CD$ del rectángulo, como se indica en la figura. Sobre el lado $AB$ del rectángulo y justo al lado del vértice $A$, impacta una partícula de masa $m$ con velocidad $v$. El coeficiente de restitución es $e$.

Se pide:

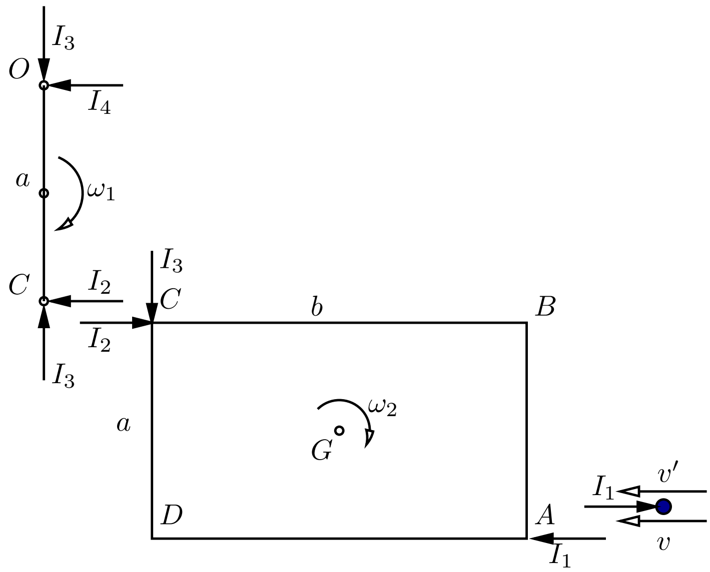
1. Obtener el movimiento de la varilla y del rectángulo, inmediatamente después del impacto.

2. Obtener los valores de todas las percusiones que se producen.

3. ¿Cuál debe ser el valor de $b$ para que el movimiento posterior se inicie sin movimiento de giro relativo entre el rectángulo y la varilla?

---

**1.**— El diagrama de impulsiones entre partícula, placa y barra se representa en la figura, así como las variables $\{\omega_1, \Omega_2, v'\}$ que definen el movimiento del sistema después del choque. En un principio pueden producirse 4 impulsiones $\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ entre las distintas partes del sistema, aunque como veremos no es imprescindible considerarlas todas al principio para resolver el movimiento, según se pide en el primer apartado.




Las ecuaciones que empleamos son las de balance de cantidad de movimiento y momento cinético de los distintos elementos, así como la del coeficiente de restitución.

1. Cantidad de movimiento de la partícula:

$$I_1 = mv - mv'; \tag{1}$$

2. Momento cinético y cantidad de movimiento ($y$) de la barra:

$$I_2 = \frac{1}{3} M a \omega_1; \tag{2}$$

$$I_2 - I_4 = M \frac{a}{2} \omega_1; \tag{3}$$

3. Momento cinético y cantidad de movimiento de la placa:

$$\begin{aligned} I_1 a &= \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \omega_2 + \frac{a}{2} M \left( \omega_1 a + \omega_2 \frac{a}{2} \right) + \frac{b}{2} M \omega_2 \frac{b}{2} \\ &= \frac{1}{3} M (a^2 + b^2) \omega_2 + \frac{1}{2} M a^2 \omega_1; \end{aligned} \tag{4}$$

$$I_1 - I_2 = M \left( \omega_1 a + \omega_2 \frac{a}{2} \right); \tag{5}$$

$$I_3 = M \omega_2 \frac{b}{2}; \tag{6}$$

4. Coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v' - (\omega_1 a + \omega_2 a)}{v} \quad \Rightarrow \quad ev + v' = \omega_1 a + \omega_2 a. \tag{7}$$

Para resolver el movimiento basta tomar las 5 ecuaciones (1), (2), (4), (5) y (7), para resolver las 5 incógnitas $\{\omega_1, \omega_2, v', I_1, I_2\}$. Comenzamos por sustituir la ecuación (1) en (4), para obtener

$$ma(v - v') = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2) \omega_2 + \frac{1}{2} M a^2 \omega_1; \tag{8}$$

Sustituyendo ahora (1) y (2) en (5),

$$mv - mv' = \frac{1}{3} M a \omega_1 + M \left( \omega_1 a + \omega_2 \frac{a}{2} \right) = \frac{4}{3} M a \omega_1 + \frac{1}{2} M a \omega_2; \tag{9}$$

Eliminando entre (8) y (9), se obtiene la relación

$$\frac{4}{3} M a^2 \omega_1 + \frac{1}{2} M a^2 \omega_2 = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2) \omega_2 + \frac{1}{2} M a^2 \omega_1; \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{2b^2 - a^2}{5a^2} \omega_2. \tag{10}$$

Sustituimos ahora (7) y (10) en (9),

$$mv(1 + e) = ma\omega_1 + ma\omega_2 + \frac{4}{3} M a \frac{2b^2 - a^2}{5a^2} \omega_2 + \frac{1}{2} M a \omega_2,$$

de donde podemos despejar:

$$\boxed{\omega_2 = \frac{5va(1 + e)}{(2b^2 + 4a^2) + \frac{M}{6m}(16b^2 + 7a^2)}.} \tag{11}$$

Empleando (10) y (7) se obtiene:

$$\boxed{\omega_1 = \frac{v(1 + e)(2b^2 - a^2)/a}{(2b^2 + 4a^2) + \frac{M}{6m}(16b^2 + 7a^2)}; \quad v' = \frac{v(1 + e)(4a^2 + 2b^2)}{(4a^2 + 2b^2) + \frac{M}{6m}(16b^2 + 7a^2)}.} \tag{12}$$

**2.—** Las percusiones se calculan a partir de los resultados anteriores (11), (12) en (1), (2), (6) y (3):

$$I_1 = mv - \frac{mv(1+e)(4a^2+2b^2)}{(4a^2+2b^2)+\frac{M}{6m}(16b^2+7a^2)}; \quad I_2 = \frac{\frac{1}{3}Mv(1+e)(2b^2-a^2)}{(4a^2+2b^2)+\frac{M}{6m}(16b^2+7a^2)};$$
$$I_3 = \frac{\frac{5}{2}Mv(1+e)ab}{(4a^2+2b^2)+\frac{M}{6m}(16b^2+7a^2)}; \qquad I_4 = -\frac{1}{2}I_2.$$

**3.—** Igualando las velocidades de rotación de ambos elementos entre (11) y (12), resulta:

$$\boxed{b = a\sqrt{3}.}$$