Mecánica

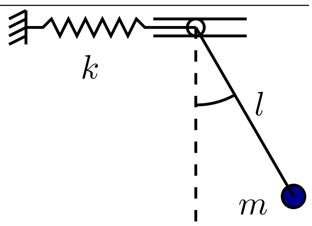
EXAMEN FINAL (7 de junio de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos partiendo de las ecuaciones, mientras que si se pide *deducir* es necesario justificar todos los resultados. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

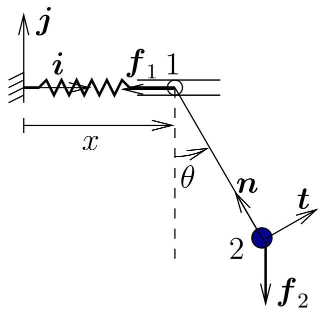
Enunciar El principio de D'alembert para un sistema mecánico general. *Aplicación*: Mediante dicho principio obtener las ecuaciones que definen la dinámica del sistema de la figura, formado por un péndulo simple cuya base puede moverse en horizontal unida a un resorte lineal de constante k. (5 ptos.)



En un sistema material con enlaces lisos, la evolución dinámica del sistema está determinada como condición necesaria y suficiente por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas y de las fuerzas de inercia para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:

$$\boxed{\sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i - \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \qquad \forall\{\delta\boldsymbol{r}_i\}\ \text{compatibles}}$$

En este caso particular el sistema tiene dos grados de libertad: x y θ. Las fuerzas activas actuantes y sus respectivos desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces son:



$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= -kx\boldsymbol{i} \qquad & \delta\boldsymbol{r}_1 &= \delta x\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{f}_2 &= -mg\boldsymbol{j} \qquad & \delta\boldsymbol{r}_2 &= \delta x\boldsymbol{i} + l\delta\theta\boldsymbol{t} \end{aligned}$$

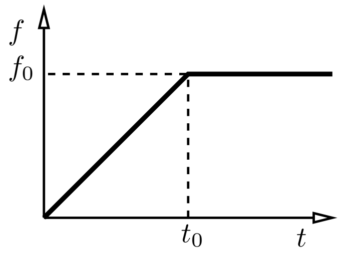
La aceleración de la masa m se puede expresar mediante la ecuación siguiente: $\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \ddot{x}\boldsymbol{i} + l\dot{\theta}^2\boldsymbol{n} + l\ddot{\theta}\boldsymbol{t}$. De este modo, sabiendo que $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i} = -\operatorname{sen}\theta$, $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{i} = \cos\theta$, $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{j} = \operatorname{sen}\theta$; la aplicación del principio de D'Alembert para este caso particular se expresa mediante la ecuación siguiente:

$$[-kx - m(\ddot{x} - l\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta)]\delta x + [-mgl\operatorname{sen}\theta - m(\ddot{x}l\cos\theta + l^2\ddot{\theta})]\delta\theta = 0 \qquad \forall\delta\theta, \delta x$$

Al ser arbitrarios $(\delta\theta, \delta x)$ resultan las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\begin{aligned} -kx - m(\ddot{x} - l\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta) &= 0 \\ -mgl\operatorname{sen}\theta - m(\ddot{x}l\cos\theta + l^2\ddot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

Sea un oscilador lineal con masa m, amortiguamiento viscoso c y constante elástica del resorte k, sometido a una fuerza externa $f(t)$. a) *Expresar* la ecuación diferencial del movimiento y *describir* la estructura de la solución para un caso general; b) Suponiento que la fuerza $f(t)$ es un valor constante aplicado mediante una rampa inicial (figura adjunta), y que el sistema parte del reposo con elongación nula, *obtener* la solución del movimiento entre $t = 0$ y $t = t_0$, así como el régimen permanente del movimiento para $t \to \infty$. (5 ptos.)



a. La ecuación diferencial del movimiento se expresa:

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)}$$

La solución se puede descomponer como la suma de la solución (general) de la ecuación homogénea y una solución particular (de la completa):

$$x = \underbrace{Ae^{-\xi\omega_0 t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)}_{\text{sol. homog.}} + \underbrace{x_p}_{\text{sol. part.}}$$

donde $\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$, $\xi = \dfrac{c}{2m\omega_0}$ y $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; admitiendo que $\xi < 1$.

b. En este caso

$$f(t) = \begin{cases} f_0\dfrac{t}{t_0}; & t \le t_0 \\ f_0; & t > t_0 \end{cases}$$

Una solución particular se puede expresar del siguiente modo:

$$x_p(t) = \begin{cases} \dfrac{f_0}{k}\dfrac{t}{t_0} - \dfrac{cf_0}{k^2 t_0}; & t \le t_0 \\ \dfrac{f_0}{k}; & t > t_0 \end{cases}$$

Para $\boxed{t \le t_0}$ la solución general de la ecuación resulta:

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{-\xi\omega_0 t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_1) + \frac{f_0}{k}\frac{t}{t_0} - \frac{cf_0}{k^2 t_0}}$$

Para las condiciones iniciales dadas $x_0 = \dot{x}_0 = 0$:

$$\tan\varphi_1 = \frac{2mc\omega}{c^2 - 2mk}$$

$$A_1 = \frac{cf_0}{k^2 t_0}\frac{\sqrt{1+\tan^2\varphi_1}}{\tan\varphi_1}$$

Para $\boxed{t > t_0}$ la solución general de la ecuación resulta:

$$\boxed{x(t) = A_2 e^{-\xi\omega_0 t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_2) + \frac{f_0}{k}}$$

Por tanto: $x(t \to \infty) = \dfrac{f_0}{k}$