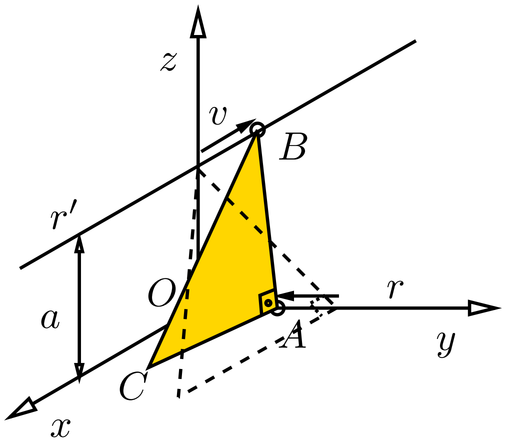
Mecánica

EXAMEN FINAL (7 de junio de 2002)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

Una escuadra ABC se mueve de forma que el vértice A recorre una recta r y el vértice B recorre otra recta r' que se cruza con la anterior a una distancia a formando ángulo recto. Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ miden $a\sqrt{2}$, y el ángulo $\angle(CAB)$ vale $\pi/2$. El punto B tiene una velocidad impuesta constante v, comenzando su movimiento (en $t = 0$) sobre el eje de mínima distancia (en la figura, el eje Oz). El vértice C permanece en todo instante en el plano por r paralelo a r' (Oxy en la figura).
Se pide, todo ello para un instante genérico:

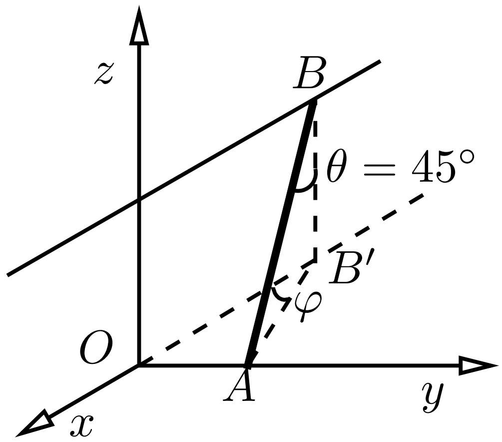


1. Velocidad del punto A;
2. Velocidad angular del segmento AB considerado como una varilla (es decir, sin considerar rotación alrededor de su propio eje);
3. Velocidad de rotación de la escuadra ABC;
4. Velocidad y aceleración de C.

———————— ⋆ ————————

1. Se observa que el ángulo θ que forma el segmento AB con BB' (contenido en el plano $y = 0$) es 45° en todo instante:

$$\cos\theta = \frac{a}{a\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = 45^\circ.$$



De este modo $\overline{BB'} = \overline{AB'} = a$. La velocidad de A es $\boldsymbol{v}_A = \dot{y}_A\,\boldsymbol{j}$. Sabiendo que $y_A = \overline{AB'}\operatorname{sen}\varphi$ y $\cos\varphi = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{AB'}} = \dfrac{vt}{a}$, resulta:

$$y_A = \sqrt{a^2 - v^2t^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v}_A = \frac{-v^2t}{\sqrt{a^2 - v^2t^2}}\,\boldsymbol{j}}.$$

Otra forma (equivalente) de expresar este resultado es en función del parámetro φ, teniendo en cuenta que $\dot{\varphi} = -\dfrac{v}{a\operatorname{sen}\varphi}$:

$$\boldsymbol{v}_A = a\dot{\varphi}\cos\varphi\,\boldsymbol{j} = -\frac{v}{\operatorname{tg}\varphi}\,\boldsymbol{j}.$$

2. Fijándonos en el triángulo ABB', dado que $\dot{\theta} = 0$, el movimiento del segmento AB puede interpretarse como una rotación alrededor del eje vertical BB' (además del movimiento de traslación de B):

$$\boldsymbol{\Omega}_{AB} = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k} = \frac{-v}{\sqrt{a^2 - v^2t^2}}\,\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

Precisando la respuesta debe tenerse en cuenta que la velocidad de rotación de un segmento está indeterminada, a falta de una rotación arbitraria alrededor del propio eje, por lo que la respuesta anterior no es la única posible. Podríamos determinar una velocidad de rotación *canónica* cuya componente según el propio segmento sea nula. Para ello se partimos de la expresión del campo de velocidades:

$$\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\Omega}_{AB} \wedge \boldsymbol{r}_{AB};$$

premultiplicando vectorialmente esta ecuación por $\boldsymbol{r}_{AB}$ se despeja:

$$\boldsymbol{\Omega}_{AB} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_{AB}|^2}[\boldsymbol{r}_{AB} \wedge (\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A) + (\boldsymbol{r}_{AB} \cdot \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{r}_{AB}],$$

y teniendo en cuenta que el segundo sumando en el corchete anterior lleva la dirección de $\boldsymbol{r}_{AB}$, se elimina resultando:

$$\boldsymbol{\Omega}^0_{AB} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_{AB}|^2}\boldsymbol{r}_{AB} \wedge (\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A).$$

Finalmente, teniendo en cuenta

$$\boldsymbol{r}_{AB} = a(-\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}); \qquad |\boldsymbol{r}_{AB}| = a\sqrt{2}; \qquad \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A = a\dot{\varphi}(\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} - \cos\varphi\,\boldsymbol{j}),$$

resulta

$$\boldsymbol{\Omega}^0_{AB} = \frac{\dot{\varphi}}{2}(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}).$$

Puede comprobarse fácilmente que esta velocidad angular no tiene componente según AB ($\boldsymbol{\Omega}^0_{AB} \cdot \boldsymbol{r}_{AB} = 0$). También se verifica de forma inmediata que la diferencia de esta velocidad angular con la anterior lleva la dirección de AB (definida por el vector unitario $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$:

$$\boldsymbol{\Omega}_{AB} = \boldsymbol{\Omega}^0_{AB} + \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{2}a}\boldsymbol{u}.$$

3. La velocidad de rotación de la escuadra se puede expresar en general como la rotación de AB más una rotación alrededor del mismo:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^0_{AB} + \omega\boldsymbol{u} = \Omega_x\,\boldsymbol{i} + \Omega_y\,\boldsymbol{j} + \Omega_z\,\boldsymbol{k}.$$

Desarrollando la expresión del campo de velocidades,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_C &= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AC} \\ &= a\dot{\varphi}\cos\varphi\,\boldsymbol{j} + [a\sqrt{2}\Omega_z\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + a\sqrt{2}\Omega_z\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j} - (a\sqrt{2}\Omega_x\cos\varphi + a\sqrt{2}\Omega_y\operatorname{sen}\varphi)\boldsymbol{k}]; \end{aligned} \tag{2}$$

teniendo en cuenta que $\Omega_x = \left(\frac{\dot{\varphi}}{2} - \frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)\cos\varphi$, $\Omega_y = \left(\frac{\dot{\varphi}}{2} - \frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sen}\varphi$, Al imponer la condición de que la velocidad de C sea horizontal resulta:

$$\boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_x = \Omega_y = 0; \quad \omega = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{2}}.$$

esto conduce al resultado

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^0_{AB} + \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u} = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k}.$$

Comprobamos que esta velocidad de rotación coincide con la primera solución obtenida antes para el segmento AB, (1), lo que no es sorprendente ya que al ser esta según z, las velocidades que imprime a todos los puntos del sólido son según xy, condición que debe cumplir C. (Se trata de una coincidencia casual que precisamente la velocidad de rotación de AB calculada según el procedimiento más simple de (1) sea igual a la velocidad de rotación de ABC.)

4. Según (2), la velocidad de C resulta

$$\boldsymbol{v}_C = a\sqrt{2}\dot{\varphi}(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j}) + a\dot{\varphi}\cos\varphi\,\boldsymbol{j}. \tag{3}$$

La aceleración se puede obtener a partir de la correspondiente en A:

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{AC} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AC})$$

Sabiendo

$$\boldsymbol{a}_A = \ddot{y}_A\,\boldsymbol{j} = a(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi)\boldsymbol{j} = -\frac{v^2}{\sqrt{a^2 - v^2t^2}}\left[1 + \frac{v^2t^2}{a^2 - v^2t^2}\right]\boldsymbol{j}$$
$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \ddot{\varphi}\,\boldsymbol{k} = -\frac{v^3t}{(a^2 - v^2t^2)^{3/2}}\boldsymbol{k}$$

se obtiene finalmente:

$$\boldsymbol{a}_C = (a\ddot{\varphi}\sqrt{2}\cos\varphi - a\dot{\varphi}^2\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi)\,\boldsymbol{i} + (a\ddot{\varphi}\cos\varphi - a\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi + a\ddot{\varphi}\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi + a\dot{\varphi}^2\sqrt{2}\cos\varphi)\,\boldsymbol{j}.$$

(A idéntica expresión hubiéramos podido llegar derivando directamente las componentes de la velocidad de C en la ecuación (3).)