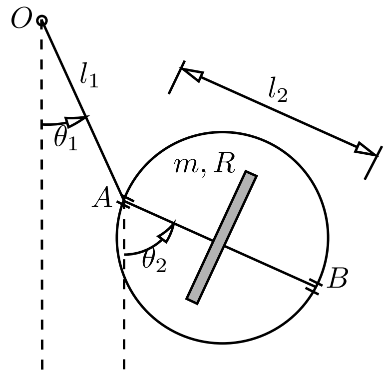
Mecánica

EXAMEN FINAL (7 de junio de 2002)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 6.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

Un sistema mecánico está formado por un disco pesado de masa m y radio R, un aro sin masa de diámetro l_2 y un alambre sin masa de longitud l_1. El disco puede girar libremente alrededor del diámetro AB del aro manteniéndose siempre perpendicular al plano de éste. A su vez, el aro se encuentra unido al punto fijo O a través del alambre OA, tal y como muestra la figura adjunta. La articulación situada en A es tal que obliga al alambre OA y al eje AB a moverse contenidos en todo momento en el mismo plano vertical móvil, dejando libres todos los demás movimientos posibles.



Se pide

1. Expresión de la velocidad angular del disco en función de los grados de libertad del problema y sus derivadas.
2. Expresión de la energía cinética del sistema.
3. Expresión del momento cinético del sistema en el punto O.
4. Expresión e interpretación física de las posibles integrales primeras del movimiento.

⋆

1. Son 4 los grados de libertad del sistema, y se representan mediante los ángulos θ_1 y θ_2 que forman los segmentos OA y AB con la vertical respectivamente, el ángulo ψ de precesión del conjunto alrededor del eje vertical fijo y el ángulo φ de rotación propia del disco alrededor del eje AB.

Por conveniencia se selecciona un triedro móvil $(G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ con origen en el centro del disco G, de forma que $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección del eje AB, $\boldsymbol{j}$ se mantiene siempre horizontal e $\boldsymbol{i}$ es perpendicular a los otros dos formando un triedro a derechas. La velocidad angular del sistema se expresa como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} + \dot{\theta}_2\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

donde $\boldsymbol{K}$ es un versor fijo de dirección vertical. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta_2\boldsymbol{i} - \cos\theta_2\boldsymbol{k}$, la expresión de la velocidad angular del disco resulta:

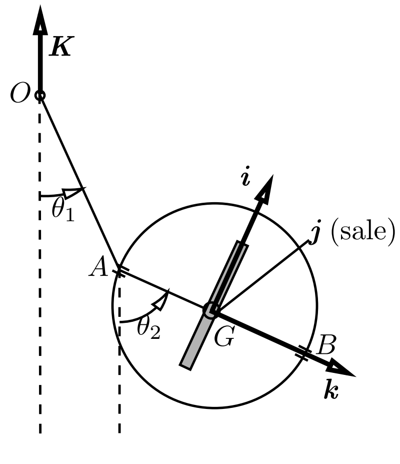


Figura 1: *Definición del sistema de referencia móvil $(G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$*

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta_2\boldsymbol{i} + \dot{\theta}_2\boldsymbol{j} + \underbrace{(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta_2)}_{r}\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

2. La energía cinética se expresa como:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{I}_G \boldsymbol{\Omega}) \tag{2}$$

siendo $\boldsymbol{I}_G$ el tensor central de inercia del disco, que en el triedro móvil se expresa como:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \frac{1}{4} m R^2 \quad , \quad C = 2A = \frac{1}{2} m R^2, \tag{3}$$

La velocidad del centro de masa G se puede obtener descomponiendo el movimiento general en uno relativo al plano vertical donde se encuentran los ejes OA y AB y otro de arrastre alrededor del eje vertical, resultando:

$$\boldsymbol{v}_G = \left[\frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right] \boldsymbol{i} - \dot{\psi} \left(l_1 \operatorname{sen} \theta_1 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \theta_2 \right) \boldsymbol{j} + l_1 \dot{\theta}_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \boldsymbol{k} \tag{4}$$

El mismo resultado podría haberse obtenido calculando $\boldsymbol{v}_G$ a partir de la velocidad del punto A con la expresión $\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_A + (\dot{\theta}_2 \boldsymbol{j} + \dot{\psi} \boldsymbol{K}) \wedge \boldsymbol{AG}$

La expresión final de la energía cinética se obtiene empleando las relaciones (1), (2), (3) y (4), resultando:

$$T = \frac{1}{8} m R^2 \left[\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 r^2 \right] + \frac{1}{2} m \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\psi}^2 \left(l_1 \operatorname{sen} \theta_1 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \theta_2 \right)^2 \right]$$

3. El momento cinético en el punto fijo O, que no pertenece al disco, se obtiene mediante la expresión:

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_G \boldsymbol{\Omega} + m \boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{GO}$$

Empleando las expresiones (1), (3), (4) y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{GO} = l_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \boldsymbol{i} - \left(\frac{l_2}{2} + l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right) \boldsymbol{k}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_O = & \left[\frac{1}{4} m R^2 \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta_2 - m v_{G_y} \left(\frac{l_2}{2} + l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right) \right] \boldsymbol{i} \\ & + \left[\frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}_2 + m v_{G_x} \left(\frac{l_2}{2} + l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right) + m v_{G_z} l_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \right] \boldsymbol{j} \\ & + \left[\frac{1}{2} m R^2 r - m v_{G_y} l_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \right] \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

4. Existen tres integrales primeras:

- Conservación de la componente del momento cinético según el eje $\boldsymbol{k}$ móvil. Efectivamente, la articulación en A introduce un momento sobre el disco exclusivamente en la dirección de $\boldsymbol{i}$, y por tanto con componente nula según el eje de revolución del disco. Por tanto:

$$\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{I}_G \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{k} = cte. \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} - \dot{\psi} \cos \theta_2 = r = cte.$$

- Conservación de la componente vertical del momento cinético de todo el sistema en el punto fijo O. Efectivamente, en este caso el momento en la articulación A es interno, y las únicas fuerzas que actúan son el peso (vertical) y las reacciones en el punto O. Por tanto:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} &= \boldsymbol{H}_O \cdot (\operatorname{sen}\theta_2 \boldsymbol{i} - \cos\theta_2 \boldsymbol{k}) \\
&= \frac{1}{4} m R^2 \dot{\psi} \operatorname{sen}^2\theta_2 - \frac{1}{2} m R^2 r \cos\theta_2 + m\dot{\psi}\left(l_1 \operatorname{sen}\theta_1 + \frac{l_2}{2}\operatorname{sen}\theta_2\right)^2 = H = cte.
\end{aligned}
$$

- Por último,la energía total se mantiene constante, ya que la única fuerza que trabaja es el peso que es conservativo. Por tanto, empleando (2) y tomando como origen de potencial gravitatorio el plano horizontal que pasa por O resulta:

$$
\begin{aligned}
T + V = E = cte. = \frac{1}{8} m R^2 &\left[\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\theta_2 + \dot{\theta}_2^2 + 2r^2\right] \\
+ \frac{1}{2} m &\left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 \frac{l_2}{2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\psi}^2\left(l_1 \operatorname{sen}\theta_1 + \frac{l_2}{2}\operatorname{sen}\theta_2\right)^2\right] \\
&\qquad - mg\left(l_1 \cos\theta_1 + \frac{l_2}{2}\cos\theta_2\right)
\end{aligned}
$$