Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (21 de enero de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

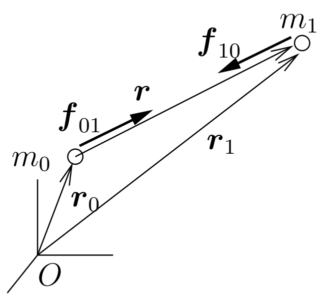
Ejercicio 1.º (puntuación: 5/25-parcial, 5/45-final) Tiempo: 30 min.

Responder a la siguiente cuestión teórico-práctica *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Se considera un sistema aislado con dos masas m_0 y m_1, que interactúan mutuamente con una fuerza atractiva de valor $f(r)$, siendo r la distancia entre ambas. Responder a las siguientes cuestiones de forma razonada:

1. Reducir el problema para expresar el movimiento relativo de una masa respecto de la otra mediante una única ecuación diferencial (vectorial).
2. Describir las características principales del movimiento relativo, señalando especialmente las constantes cinéticas del mismo.
3. Suponiendo $f(r) = kr^{-5/2}$, obtener la ecuación dinámica del movimiento relativo (diferencial de segundo orden) según la dirección de r, expresada en función de r y sus derivadas tan sólo. Mediante esta ecuación estudiar la posibilidad de una órbita circular.

1.— Empezamos por observar que sería un grave error plantear sin más la segunda ley de Newton para el movimiento relativo respecto a una de las masas, ya que no es una referencia inercial. Consideramos los vectores posición respecto a una referencia inercial $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$, y el relativo $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1$. Ambas masas se atraen entre entre sí por fuerzas centrales y opuestas, cuya expresión vectorial es $\boldsymbol{f}_{10} = -f(r)\boldsymbol{u}_r$ (fuerza sobre m_1 ejercida por m_0, siendo $\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{r}/r$ el vector unitario en dirección de $\boldsymbol{r}$) y $\boldsymbol{f}_{01} = -\boldsymbol{f}_{10}$ respectivamente. Escribiendo las ecuaciones dinámicas de cada masa, en la referencia inercial:



$$\left.\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= \frac{1}{m_1}\boldsymbol{f}_{10} \\ \ddot{\boldsymbol{r}}_0 &= \frac{1}{m_0}\boldsymbol{f}_{01} \end{aligned}\right\}, \text{ y restando:} \quad \ddot{\boldsymbol{r}}_1 - \ddot{\boldsymbol{r}}_0 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_0}\right)\boldsymbol{f}_{10},$$

es decir

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = -f(r)\boldsymbol{u}_r, \quad \text{siendo } \mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \quad \text{(masa reducida).} \tag{1}$$

Esta ecuación deja el problema del movimiento de los dos cuerpos reducido al movimiento relativo de un cuerpo respecto del otro, que puede considerarse como si fuera en una referencia inercial sin más que emplear la masa reducida μ.

2.— El movimiento definido por (1) se produce bajo fuerzas centrales, por lo que al ser nulo el momento de las fuerzas respecto del centro atractor (que llamaremos a partir de ahora O), el momento cinético $\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{r} \wedge \mu\dot{\boldsymbol{r}}$ se conserva. Esto tiene dos consecuencias básicas:

$$\begin{cases} \text{dirección de } \boldsymbol{H}_O \text{ constante} & \Rightarrow \quad \text{trayectoria plana } (\boldsymbol{r} \text{ normal a dirección fija}) \\ \text{módulo } H = |\boldsymbol{H}_O| \text{ constante} & \Rightarrow \quad H = \mu r^2\dot{\theta} \text{ (cte.),} \end{cases} \tag{2}$$

donde se han empleado las coordenadas polares (r, θ). La ecuación $(2)_2$ tiene el significado geométrico de la constancia de la velocidad con la que m_1 barre las áreas (velocidad areolar). La constante $C = H/\mu$ se denomina *constante de las áreas.*

Por otra parte, podemos obtener un potencial para la fuerza $-f(r)$:

$$V(r) = -\int -f(r)\,\mathrm{d}r = \int f(r)\,\mathrm{d}r,$$

bastando para ello que $f(r)$ sea integrable, lo que se cumplirá para una clase muy general de funciones, siempre que sea continua por ejemplo. En este caso la energía se conserva también:

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \quad \text{(cte.)}. \tag{3}$$

3.— Teniendo en cuenta la expresión de la aceleración radial en polares, la ecuación de la dinámica en esta dirección es

$$\mu\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -f(r) = -kr^{-5/2}; \tag{4}$$

empleando $(2)_2$ podemos eliminar $\dot{\theta} = C/r^2$, resultando:

$$\mu\left(\ddot{r} - C^2r^{-3}\right) = -kr^{-5/2}, \tag{5}$$

que es la ecuación pedida. Se obtendrá una órbita circular cuando $\ddot{r} = 0$, por lo cual

$$\mu C^2 r^{-3} = kr^{-5/2} \quad \Rightarrow \quad r^{1/2} = \frac{\mu C^2}{k}.$$

Por otra parte, en el movimiento circular $\dot{\theta} = \omega$ (cte.) y la constante de las áreas vale $C = r^2\omega$, con lo cual el radio de la circunferencia sería

$$r^{1/2} = \frac{\mu r^4\omega^2}{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \left(\frac{k}{\mu\omega^2}\right)^{2/7}.}$$