Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (21 de enero de 2003)

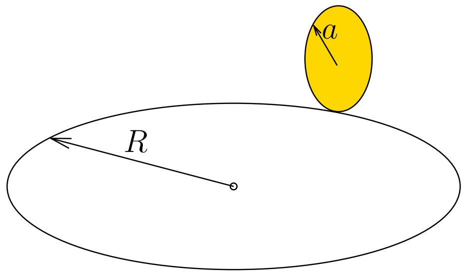
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Obtener la expresión general del campo de aceleraciones del sólido rígido, partiendo de la expresión de la derivada de un vector en un sistema móvil y razonando todos los pasos siguientes.

Aplicar al caso de la figura, en el que una rueda vertical de radio a rueda sin deslizar sobre una circunferencia horizontal (fija) de radio R, con velocidad constante de su centro (en módulo). Calcular la aceleración del punto material del disco que en un instante dado sea el más alto de la rueda. (5 ptos.)



Consideramos un vector $\boldsymbol{a}(t)$ que varía con el tiempo, un sistema de referencia S_0 que consideramos fijo o absoluto y otro S_1 que consideramos móvil, caracterizado por una velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega}$ respecto de S_0. La derivada de $\boldsymbol{a}$ que mide un observador ligado al sistema fijo S_0 la llamaremos $\dot{\boldsymbol{a}} = \mathrm{d}\boldsymbol{a}/\mathrm{d}t$, y para el sistema S_1 se denomina $(\mathrm{d}\boldsymbol{a}/\mathrm{d}t)_{\mathrm{rel}}$. La relación entre estas derivadas es

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

Suponemos ahora un sólido rígido cuyo movimiento se define por la velocidad de uno de sus puntos, $\boldsymbol{v}_O$ y su velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$, que es también la de un sistema de referencia móvil ligado al sólido. El vector posición de un punto genérico del sólido desde una referencia fija (inercial) es $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{\rho}$, siendo $\boldsymbol{\rho}$ el vector posición relativo a O. La velocidad resulta de la derivada (absoluta) de $\boldsymbol{r}$, donde aplicamos la fórmula (1) a $\boldsymbol{\rho}$ y tenemos en cuenta que $(\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}/\mathrm{d}t)_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{0}$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_O}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right) + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\rho}. \tag{2}$$

Si derivamos otra vez obtenemos la aceleración:

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_O}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\rho}). \tag{3}$$

Para el ejemplo propuesto, si la velocidad lineal (constante) del centro O del disco es v, la velocidad de rotación será $\boldsymbol{\Omega} = (v/R)\boldsymbol{k} - (v/a)\boldsymbol{i}$, donde los vectores unitarios llevan las direcciones: $\boldsymbol{i}$ radial hacia fuera en la circunferencia R, $\boldsymbol{k}$ vertical ascendente y $\boldsymbol{j}$ tangencial a la circunferencia R, formando un triedro a derechas. Para el punto más alto es $\boldsymbol{\rho} = a\,\boldsymbol{k}$, y la aceleración angular resulta (aplicando la fórmula (1)) $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = (v/R)\boldsymbol{k}\wedge((v/R)\boldsymbol{k} - (v/a)\boldsymbol{i}) = -(v^2/(aR))\boldsymbol{j}$. De esta forma:

$$\boldsymbol{a} = -\frac{v^2}{R}\boldsymbol{i} + \left(-\frac{v^2}{R}\boldsymbol{i}\right) + \left(-\frac{v^2}{a}\boldsymbol{k} - \frac{v^2}{R}\boldsymbol{i}\right) = -3\frac{v^2}{R}\boldsymbol{i} - \frac{v^2}{a}\boldsymbol{k}.$$

Sea un sistema dinámico con n grados de libertad, conservativo, con una posición de equilibrio estable. Se desea estudiar las pequeñas oscilaciones o vibraciones libres alrededor de dicha configuración. 1) *Expresar* en forma matricial el sistema de ecuaciones diferenciales linealizadas, *señalando las propiedades* de las matrices que intervienen. 2) *Definir* los modos normales de vibración y las frecuencias propias asociadas a los mismos. 3) *Demostrar* la propiedad de ortogonalidad de dichos modos respecto a la matriz de masas. (5 ptos.)

1.— Denominando $\{\mathbf{q}\} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^{\mathrm{T}}$ al vector columna de coordenadas, la ecuación matricial pedida es

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}, \tag{4}$$

donde se denomina matriz de rigidez a $[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$ y matriz de masas a $[\mathbf{M}] = [m_{ij}]$. No hay términos disipativos dependientes de la velocidad al ser un sistema conservativo, y a la expresión se iguala a $\{\mathbf{0}\}$ al tratarse de vibraciones libres. La matriz $[\mathbf{M}]$ es simétrica y definida positiva siempre, y $[\mathbf{K}]$ es simétrica siempre para fuerzas conservativas, y definida positiva si la posición de equilibrio es estable.

2.— Los modos normales de vibración son vectores $\{\mathbf{a}\}$ que para algún ω cumplen

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\} = \omega^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\}. \tag{5}$$

la expresión anterior define un problema de autovalores generalizado, siendo $\lambda = \omega^2$ el autovalor asociado con $\{\mathbf{a}\}$, denominándose ω frecuencia propia de dicho modo. Para el caso que nos ocupa ($[\mathbf{K}]$ y $[\mathbf{M}]$ simétricas y definidas positivas) hay n soluciones reales $(\{\mathbf{a}_k\}, \omega_k, k = 1, \ldots n)$.

3.— Consideramos dos modos de vibración $\{\mathbf{a}_k\}$ y $\{\mathbf{a}_l\}$, correspondientes a frecuencias propias distintas $\omega_k^2 \neq \omega_l^2$. Estos modos son ortogonales respecto a la matriz de masa $[\mathbf{M}]$:

$$\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = 0. \tag{6}$$

En efecto, debe cumplirse:

$$\begin{aligned} \omega_k^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} &= [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\}, \\ \omega_l^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} &= [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_l\}; \end{aligned}$$

premultiplicando la primera igualdad por $\{\mathbf{a}_l\}^{\mathrm{T}}$, la segunda por $\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}$ y restando ambas entre sí, gracias a la simetría de $[\mathbf{M}]$ y de $[\mathbf{K}]$ obtenemos

$$(\omega_k^2 - \omega_l^2)\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = 0. \tag{7}$$

Al ser $\omega_k^2 \neq \omega_l^2$ queda demostrada la ortogonalidad (6). $\square$