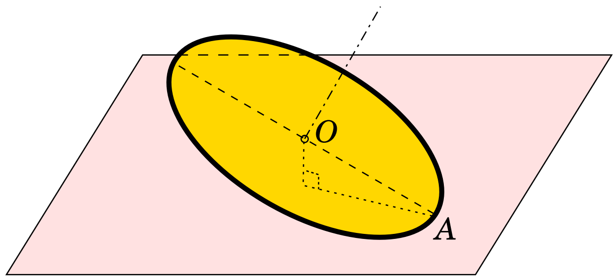
Mecánica

3.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (29 de marzo 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

Un disco circular pesado, de masa M y radio R, se mueve con el borde apoyado sobre un plano horizontal liso, sobre el cual puede deslizar libremente. Se pide:



1. Tensor de inercia en el centro del disco O, escogiendo unos ejes adecuados para expresar las componentes.

2. Grados de libertad del sistema, definiendo claramente los paramétros escogidos para representarlos.

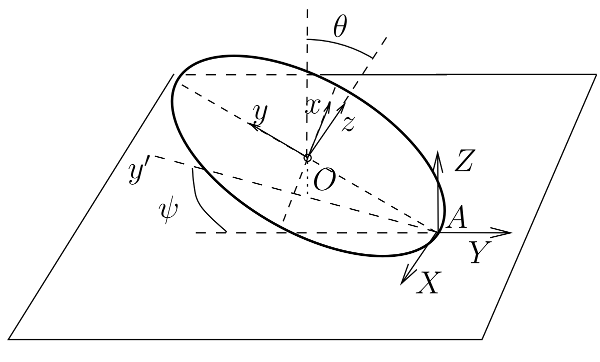
3. Momento de las fuerzas en O para una posición arbitraria, considerando un valor genérico de la reacción en el punto de contacto A.

4. Expresiones de la velocidad angular del disco y del momento cinético en O.

5. Ecuaciones de Euler de la dinámica del disco, junto con otras ecuaciones que fueran precisas para resolver completamente el sistema y calcular la reacción en A.

6. Integrales primeras. Dejar el movimiento reducido a cuadraturas.

1.— Consideramos un triedro móvil $Oxyz$, siendo Oz el eje de revolución, Ox según el diámetro horizontal y Oy según el de máxima pendiente. Por las simetrías existentes, son principales de inercia. El tensor central de inercia es



$$\boldsymbol{I}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} , \tag{1}$$

con

$$A = \frac{1}{4}MR^2,\ C = \frac{1}{2}MR^2. \tag{2}$$

El triedro móvil $Oxyz$ no está ligado al sólido, ya que no le sigue en su rotación propia alrededor de Oz. Sin embargo, al ser este eje de revolución, las componentes del tensor de inercia son constantes, por lo que resulta apropiado para describir el movimiento.

2.— El sistema tiene una única restricción, la que impone la posición en altura (Z) del disco de forma que su punto más bajo (A) esté en contacto con el plano. Por tanto el n.º de grados de libertad es $6-1=5$. La configuración puede representarse mediante los 3 parámetros angulares (ψ, θ, φ), siendo ψ el ángulo formado por la proyección y' del eje y con la dirección Y fija, θ el ángulo formado por z y la vertical fija Z, y φ la rotación propia del cilindro alrededor de su eje Oz (véase figura). Además se consideran las coordenadas (X, Y) del centro del cilindro O (según las dos direcciones fijas en el plano horizontal). La coordenada Z de dicho centro viene obligada por la ecuación de restricción

$$Z = R \operatorname{sen} \theta. \tag{3}$$

3.— Las fuerzas exteriores sobre el cilindro son su peso ($-Mg\,\boldsymbol{K}$) aplicado en O, y la reacción del plano ($N\,\boldsymbol{K}$) aplicada en el punto de contacto A. El momento de esta fuerza en O es

$$\boldsymbol{M}_O = N\,\boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{r}_{AO} = N\,\boldsymbol{K} \wedge R\,\boldsymbol{j} = -NR\cos\theta\,\boldsymbol{i}\ . \tag{4}$$

4.— La velocidad angular resulta

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\psi\,\boldsymbol{K} + \dot\theta\,\boldsymbol{i} + \dot\varphi\,\boldsymbol{k} = \dot\theta\,\boldsymbol{i} + \dot\psi \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \underbrace{(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)}_{r}\boldsymbol{k}, \tag{5}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$. El momento cinético es

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = A\dot\theta\,\boldsymbol{i} + A\dot\psi \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + Cr\,\boldsymbol{k}.$$

5.— La ecuación de balance del momento cinético se expresa teniendo en cuenta que el triedro $Oxyz$ gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = \boldsymbol{\Omega} - \dot\varphi\,\boldsymbol{k} = \dot\psi\,\boldsymbol{K} + \dot\theta\,\boldsymbol{i}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_O\Big|_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \wedge \boldsymbol{H}_O \\ &= A\ddot\theta\,\boldsymbol{i} + A(\ddot\psi \operatorname{sen}\theta + \dot\psi\dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{j} + C\dot r\,\boldsymbol{k} \\ &\qquad + \dot\psi \operatorname{sen}\theta(Cr - A\dot\psi\cos\theta)\boldsymbol{i} - \dot\theta(Cr - A\dot\psi\cos\theta)\boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{6}$$

Esta ecuación vectorial equivale a las tres ecuaciones escalares:

$$\left.\begin{aligned} -NR\cos\theta &= A\ddot\theta + \dot\psi \operatorname{sen}\theta(Cr - A\dot\psi\cos\theta) \\ 0 &= A(\ddot\psi \operatorname{sen}\theta + \dot\psi\dot\theta\cos\theta) - \dot\theta(Cr - A\dot\psi\cos\theta) \\ 0 &= C\dot r \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Por otra parte, el balance de cantidad de movimiento da lugar a otras tres ecuaciones

$$\dot X = \text{cte.}; \quad \dot Y = \text{cte.} \tag{8}$$

$$N - Mg = MR\left(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2 \operatorname{sen}\theta\right). \tag{9}$$

Integrando estas seis ecuaciones se puede resolver el sistema, para los cinco grados de libertad y la reacción incógnita N.

6.— Existen 4 coordenadas cíclicas. En primer lugar las dos coordenadas horizontales (8). Por otra parte, de la ecuación $(7)_3$ se obtiene $r =$ cte. Por último,

$$\boldsymbol{M}_O\cdot\boldsymbol{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{K} = A\dot{\psi}\,\mathrm{sen}^2\,\theta + Cr\cos\theta = H \quad \text{(cte.)} \tag{10}$$

Por otra parte, se conserva la energía ya que no hay fuerzas disipativas:

$$E = \frac{1}{2}M\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \frac{1}{2}\left(A\dot{\theta}^2 + A\dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + Cr^2\right) + MgZ.$$

Teniendo en cuenta las constantes antes citadas de las coordenadas cíclicas, empleando la nueva constante $E' = E - \frac{1}{2}(M\dot{X}^2 + M\dot{Y}^2 + Cr^2)$, resulta

$$E' = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{(H - Cr\cos\theta)^2}{2A\,\mathrm{sen}^2\,\theta} + MgR\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{11}$$

Esta ecuación queda expresada en función de un sólo grado de libertad, pudiendo despejar $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$, permitiendo mediante una cuadratura resolver el movimiento:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{f(\theta)} \quad \Rightarrow \quad t(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{f(\vartheta)}}\ .$$