Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (6 de Junio de 2003)

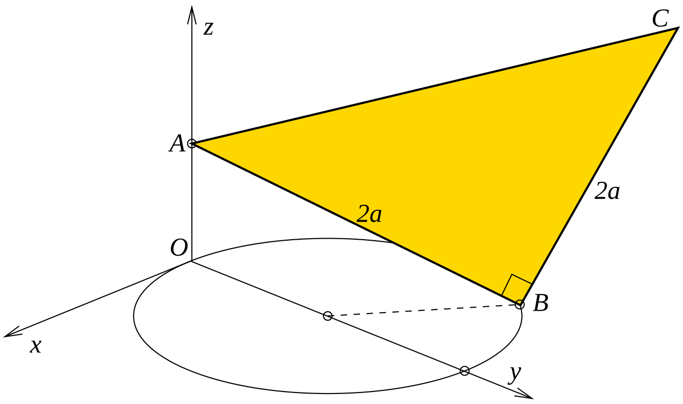
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Consideremos un triángulo isósceles ABC, rectángulo en B, cuyos catetos tienen longitud $2a$, que se mueve de forma que su vértice A permanece sobre el eje Oz de un sistema de referencia cartesiano ortonormal $Oxyz$. A su vez el vértice B recorre la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0; \quad z = 0;$$

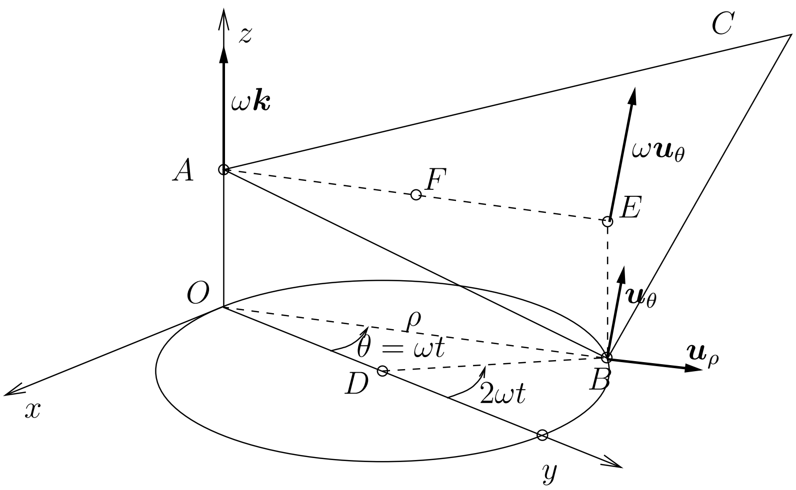
con una velocidad constante $2a\omega$. El plano del triángulo se mantiene paralelo a Oz en todo instante, estando inicialmente el lado AB sobre Oy. Se pide:



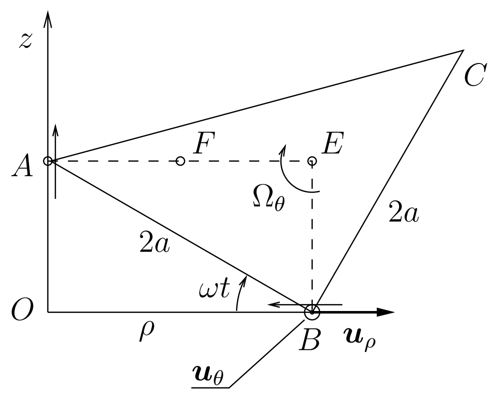
1. Determinar la velocidad y aceleración angular del triángulo
2. Determinar, en un instante genérico, el eje instantáneo del movimiento helicoidal tangente del triángulo y su velocidad mínima.
3. Calcular la velocidad del punto C y su aceleración en un instante genérico. Calcular el radio de curvatura de su trayectoria en el instante inicial.

1.— La circunferencia definida está situada en el plano Oxy, con centro en $D \equiv (0, a, 0)$ y radio a. El movimiento definido de B permite deducir los ángulos $\angle DyB = 2\omega t$ y $\angle OyB = \omega t$. Por consiguiente resulta $\overline{OB} = 2a\cos\omega t$ y $\overline{OA} = 2a \operatorname{sen}\omega t$ (ver figura). La posición y velocidad de A en un instante genérico son

$$\boldsymbol{r}_A = 2a \operatorname{sen}\omega t\, \boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{v}_A = \dot{\boldsymbol{r}}_A = 2a\omega\cos\omega t\, \boldsymbol{k}\ .$$



Para interpretar el movimiento es útil emplear el *plano meridiano $O\rho z$* que contiene en todo instante al eje fijo Oz y al eje $O\rho$ de las coordenadas cilíndricas (ver figura). El triángulo está contenido en todo instante en dicho plano. Por tanto puede interpretarse el movimiento instantáneo como la composición de dos rotaciones: 1) rotación Ω_z del plano meridiano alrededor del eje Oz; 2) rotación Ω_θ dentro de dicho plano, que por consideraciones elementales de cinemática plana será alrededor del punto E, centro instantáneo de rotación de dicho movimiento plano relativo (ver figura). Para calcular el valor de dichas rotaciones basta emplear los datos de las velocidades conocidas de A y B. En primer lugar,



Movimiento relativo de ABC en plano meridiano $O\rho z$

$$v_{Az} = \Omega_\theta \cdot \overline{AE} \quad \Rightarrow \quad \Omega_\theta = \frac{v_{Az}}{2a\cos\omega t} = \omega \ .$$

La velocidad de B es tangente a la circunferencia y de valor 2ω, proyectada según las coordenadas polares antes definidas resulta $v_{B\theta} = 2a\omega\cos\omega t$, $v_{B\rho} = 2a\omega \operatorname{sen}\omega t$. Con estos valores,

$$v_{B\theta} = \Omega_z \cdot \overline{OB} \quad \Rightarrow \quad \Omega_z = \frac{v_{B\theta}}{2a\cos\omega t} = \omega \ .$$

En consecuencia, la velocidad angular es

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\,\boldsymbol{u}_\theta + \omega\,\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

La aceleración podemos evaluarla a través de la descomposición de la derivada en la relativa al plano meridiano (que es nula) más el término complementario:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{rel}} + \omega\,\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{\Omega} = -\omega^2\,\boldsymbol{u}_\rho \ .$$

(También podría haberse obtenido razonando que $\mathrm{d}\boldsymbol{k}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta/\mathrm{d}t = -\omega\,\boldsymbol{u}_\rho$.)

2.— El movimiento helicoidal tangente es la composición de dos rotaciones de ejes no concurrentes y ortogonales, uno según z por A y otro según la dirección $\boldsymbol{u}_\theta$ por E, ambas de magnitud ω. Por consideraciones elementales de simetría puede deducirse que el eje resultante pasará por el punto medio F del segmento AE de mínima distancia entre ambos ejes de rotación. Este mismo resultado podemos obtenerlo aplicando la expresión general de un punto del eje,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + \frac{\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}_A}{\Omega^2} = \boldsymbol{r}_A + \frac{1}{2\omega^2}(\omega\,\boldsymbol{u}_\theta + \omega\,\boldsymbol{k})\wedge 2a\omega\cos\omega t\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r}_A + a\cos\omega t\,\boldsymbol{u}_\rho \ ,$$

que corresponde precisamente al punto F. El eje queda definido por este punto y la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$. La velocidad mínima es la velocidad de deslizamiento de los puntos del eje helicoidal, resultando

$$v_{\min} = \boldsymbol{v}_A \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = \sqrt{2}\,a\omega\cos\omega t \ .$$

3.— La velocidad de C puede calcularse como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_C &= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{AC} \\ &= 2a\omega(\cos\omega t - \operatorname{sen}\omega t)\boldsymbol{u}_\rho + 2a\omega(\cos\omega t + \operatorname{sen}\omega t)\boldsymbol{u}_\theta - 2a\omega\operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{k} \ . \end{aligned} \tag{2}$$

La aceleración de C vale

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_C &= \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{AC} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AC}) \\ &= -2a\omega^2 \operatorname{sen}\omega t\, \boldsymbol{k} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{AC} + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{r}_{AC})\boldsymbol{\Omega} - \Omega^2 \boldsymbol{r}_{AC} \\ &= -4a\omega^2(\cos\omega t + \operatorname{sen}\omega t)\boldsymbol{u}_\rho + 4a\omega^2(\cos\omega t - \operatorname{sen}\omega t)\boldsymbol{u}_\theta - 2a\omega^2 \cos\omega t\, \boldsymbol{k}\ .\end{aligned} \tag{3}$$

Para obtener el radio de curvatura de la trayectoria de C, derivamos el vector tangente unitario, empleando las fórmulas de Frenet:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{n}}{R} v_C \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{v}_C}{v_C} = \frac{\boldsymbol{a}_C}{v_C} - \frac{\dot{v}_C}{v_C^2}\boldsymbol{v}_C\ .\end{aligned} \tag{4}$$

Despejando,

$$R = \frac{v_C^2}{|\boldsymbol{a}_C - (\dot{v}_C/v_C)\boldsymbol{v}_C|}\ . \tag{5}$$

A partir de (2) se obtiene

$$v_C = 2a\omega\sqrt{2 + \operatorname{sen}^2\omega t}, \quad \dot{v}_C = \frac{2a\omega^2 \operatorname{sen}\omega t \cos\omega t}{\sqrt{2 + \operatorname{sen}^2\omega t}}\ .$$

En el instante inicial $\dot{v}_C = 0$ y se deduce por (4) que la aceleración de C lleva la dirección normal. A partir de (5) se obtiene

$$R(0) = \frac{v_C^2(0)}{a_C(0)}\ ,$$

y teniendo en cuenta (3)

$$a_C = 2a\omega^2\sqrt{9 - \operatorname{sen}^2\omega t}\ ,$$

resultando

$$R(0) = \frac{8a^2\omega^2}{6a\omega^2} = \frac{4}{3}a\ .$$

Aunque no se pide, el radio de curvatura para un instante genérico podría obtenerse igualmente desarrollando la expresión anterior (5), resultando

$$R(t) = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{6}\, a(2 + \operatorname{sen}^2\omega t)^2}{\sqrt{3 + \operatorname{sen}^2\omega t}\sqrt{2 + \operatorname{sen}^2\omega t}}\ .$$