Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (6 de junio de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una placa cuadrada pesada de lado $R\sqrt{3}$ y masa M se mueve en el espacio de forma que dos de sus vértices contíguos A y B se encuentran situados en todo momento sobre una circunferencia horizontal fija y lisa de centro O y radio R.

Se pide:

1. Expresión de la velocidad de rotación de la placa en función de sus grados de libertad y sus derivadas;
2. Expresión del momento cinético de la placa en el centro O de la circunferencia fija;
3. Ecuaciones diferenciales del movimiento de la placa.

---

1. La placa tiene dos grados de libertad, que podemos representar mediante los ángulos ψ y θ. El ángulo ψ define el giro de la arista AB alrededor de la dirección vertical fija (definida por el versor $\boldsymbol{K}$, ver Figura 1), y el ángulo θ el giro de la placa alrededor de la arista AB.

Para expresar las distintas magnitudes del problema resulta conveniente emplear un sistema auxiliar móvil ligado a la placa $(G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, de forma que el versor $\boldsymbol{i}$ está contenido en la placa y es paralelo a la arista AB, el $\boldsymbol{j}$ está también contenido en la placa y es perpendicular a la arista AB, y el $\boldsymbol{k}$ es perpendicular a la placa formando un triedro ortonormal orientado a derechas con los dos anteriores.

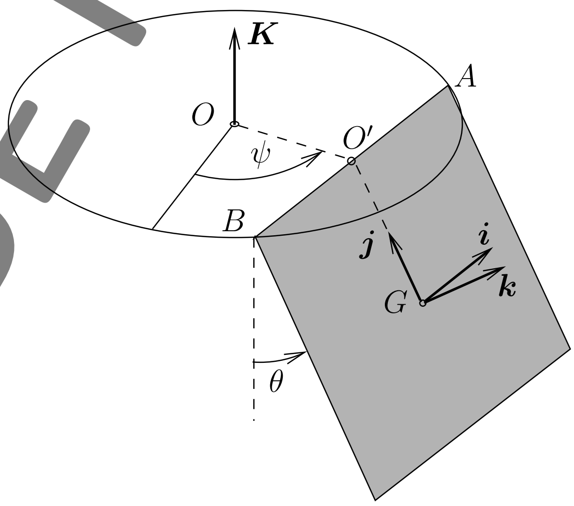

Figura 1: *Vista de una posición genérica de la placa con la definición del sistema auxiliar móvil del cuerpo*

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{K} = \cos\theta \boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{k}$, la velocidad angular se expresa en el sistema ligado a la placa como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} - \dot{\theta}\boldsymbol{i} = -\dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{k} \tag{1}$$

2. Una forma de calcular el momento cinético de la placa en el punto O es emplear la expresión:

$$\boldsymbol{H}_O = \underbrace{\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}}_{\boldsymbol{H}_G} + M\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{GO} \tag{2}$$

Es importante observar que en este caso $\boldsymbol{H}_O \neq \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$, puesto que O no coincide en general con ningún punto material del sólido con velocidad nula.

El tensor de inercia $\boldsymbol{I}_G$ se expresa en el triedro del sólido como:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad , \qquad A = \frac{1}{4}MR^2 \quad , \quad C = 2A = \frac{1}{2}MR^2 \tag{3}$$

Por otro lado, la velocidad del centro de masa G se puede obtener a partir de la velocidad del punto medio de la arista AB:

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'G} \quad ,$$

y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{v}_{O'} = (R/2)\dot{\psi}\boldsymbol{i}$, y que $\boldsymbol{O'G} = -(R\sqrt{3}/2)\boldsymbol{j}$ resulta:

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{R}{2}\dot{\psi}\left(1 + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{i} + \frac{R\sqrt{3}}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{k} \tag{4}$$

Haciendo uso de las relaciones (1), (2), (3) y (4), y teniendo en cuenta la expresión para $\boldsymbol{GO}$:

$$\boldsymbol{GO} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{3} + \operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{j} - \frac{R}{2}\cos\theta\boldsymbol{k} \quad , \tag{5}$$

se obtiene la siguiente expresión para $\boldsymbol{H}_O$:

$$\boldsymbol{H}_O = -MR^2\dot{\theta}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}\cos\theta\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{3}}{4}MR^2\dot{\psi}\left(1 + 2\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)\boldsymbol{k} \tag{6}$$

3. Existen dos integrales primeras que proporcionan las ecuaciones diferenciales del movimiento de la placa.

La componente vertical del momento cinético en O es constante puesto que el momento de todas las fuerzas que actúan es nulo según esa dirección: las fuerzas verticales (peso y componentes verticales de las reacciones en A y B) son paralelas a $\boldsymbol{K}$, y las reacciones horizontales en A y B pasan por O al ser lisa la circunferencia. Por tanto, la primera ecuación diferencial del movimiento tiene la expresión:

$$\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}\left(1 + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta\right) = \text{cte.}$$

La otra ecuación expresa la constancia de la energía total, puesto que el peso, que es la única fuerza que trabaja sobre la placa, es conservativa:

$$E = T + V = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\psi}^2\left(1 + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta\right) - Mg\frac{R\sqrt{3}}{2}\cos\theta = \text{cte.}$$