Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (8 de septiembre de 2003)

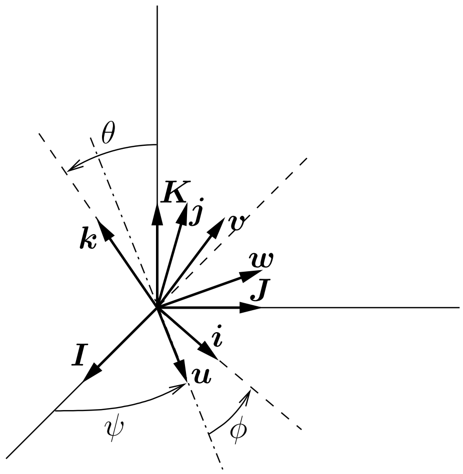
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 7,5/45) Tiempo: 45 min.

Responder a la siguiente cuestión teórico-práctica *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Se considera un sólido con el movimiento más general posible. *Expresar* un conjunto de coordenadas libres que determinen unívocamente la configuración, definiéndolas claramente. *Discutir* si importa o no el orden en que se efectúan las rotaciones para definir la posición del sólido con las coordenadas expresadas. Se considera un triedro de direcciones fijas $\{G, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ y un triedro móvil ligado al sólido $\{G, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. *Deducir* las expresiones (matriciales o algebraicas) que relacionan los vectores unitarios de ambos triedros, en función de las coordenadas anteriores.

Las coordenadas del sólido son 6: 3 coordenadas que definen la posición de un punto, por ejemplo el centro de masa G: (X, Y, Z), y tres coordenadas angulares que definen la orientación del sólido con este punto fijo. Para esto último tomaremos los ángulos de Euler (ψ, θ, ϕ), que pueden definirse como tres rotaciones sucesivas que transforman el triedro fijo $\{G, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ para obtener el triedro ligado al sólido $\{G, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$:



1) una rotación $\psi\,\boldsymbol{K}$ *(precesión)* que transforma $\{G, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ en $\{G, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{K}\}$, $\begin{cases} \boldsymbol{u} = \cos\psi\,\boldsymbol{I} + \operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{J}, \\ \boldsymbol{w} = -\operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{I} + \cos\psi\,\boldsymbol{J}; \end{cases}$

2) una rotación $\theta\,\boldsymbol{u}$ *(nutación)* que transforma $\{G, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{K}\}$ en $\{G, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}\}$, $\begin{cases} \boldsymbol{v} = \cos\theta\,\boldsymbol{w} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{K}, \\ \boldsymbol{k} = -\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{w} + \cos\theta\,\boldsymbol{K}; \end{cases}$

3) una rotación $\phi\,\boldsymbol{k}$ *(rotación propia)* que transforma $\{G, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}\}$ en $\{G, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, $\begin{cases} \boldsymbol{i} = \cos\phi\,\boldsymbol{u} + \operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{j} = -\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{u} + \cos\phi\,\boldsymbol{v}. \end{cases}$

Las tres coordenadas de traslación (X, Y, Z) pueden efectuarse en cualquier orden, pero las rotaciones (ψ, θ, ϕ) deben efectuarse en el orden y alrededor de los ejes descritos. Las rotaciones finitas no son conmutativas, y un cambio de orden en las mismas produciría un movimiento distinto.

Componiendo las anteriores relaciones, pueden obtenerse los versores del triedro del cuerpo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i} &= \cos\phi\,\boldsymbol{u} + \operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{v} = \cos\phi(\cos\psi\,\boldsymbol{I} + \operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{J}) + \operatorname{sen}\phi(\cos\theta\,\boldsymbol{w} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{K}) \\
&= \cos\phi\cos\psi\,\boldsymbol{I} + \cos\phi\operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{J} + \operatorname{sen}\phi\cos\theta(-\operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{I} + \cos\psi\,\boldsymbol{J}) + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{K} \\
&= (\cos\phi\cos\psi - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi)\boldsymbol{I} + (\cos\phi\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\phi\cos\theta\cos\psi)\boldsymbol{J} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{K} \\
\boldsymbol{j} &= -\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{u} + \cos\phi\,\boldsymbol{v} = -\operatorname{sen}\phi(\cos\psi\,\boldsymbol{I} + \operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{J}) + \cos\phi(\cos\theta\,\boldsymbol{w} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{K}) \\
&= -\operatorname{sen}\phi\cos\psi\,\boldsymbol{I} - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{J} + \cos\phi\cos\theta(-\operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{I} + \cos\psi\,\boldsymbol{J}) + \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{K} \\
&= -(\operatorname{sen}\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi)\boldsymbol{I} + (-\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi)\boldsymbol{J} + \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{K}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k} &= -\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{w} + \cos\theta\,\boldsymbol{K} = -\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{I} + \cos\psi\,\boldsymbol{J}) + \cos\theta\,\boldsymbol{K} \\
&= \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{I} - \operatorname{sen}\theta\cos\psi\,\boldsymbol{J} + \cos\theta\,\boldsymbol{K}
\end{aligned}
$$

Estas relaciones pueden resumirse como expresión matricial:

$$
\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{K}\end{pmatrix} \cdot
\underbrace{\begin{pmatrix}
\cos\phi\cos\psi - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi & -\operatorname{sen}\phi\cos\psi - \cos\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi \\
\cos\phi\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\phi\cos\theta\cos\psi & -\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi & -\operatorname{sen}\theta\cos\psi \\
\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \cos\phi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta
\end{pmatrix}}_{[\boldsymbol{R}]}
$$