Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

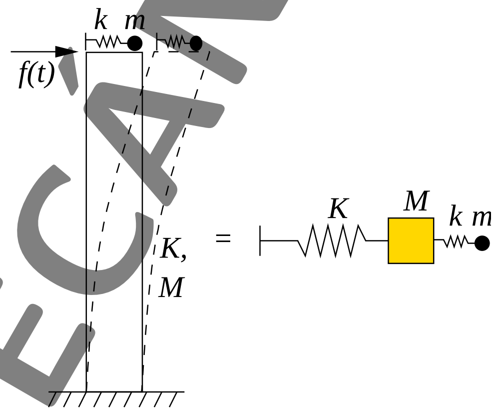
Mecánica

EXAMEN 4.º PARCIAL (8 de septiembre de 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

Una torre de gran altura manifiesta cierta flexibilidad frente a las acciones del viento, pudiendo considerarse equivalente a una masa puntual M con un resorte horizontal de rigidez K. Para reducir las oscilaciones se instala en el nivel superior de la torre un oscilador armónico horizontal de masa $m = \epsilon M$ y rigidez $k = \epsilon K$. Se pide:



1. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema, suponiendo pequeñas oscilaciones, así como las matrices de masa y rigidez.

2. Frecuencias propias del sistema, dejándolas expresadas en función de $\omega_0^2 = K/M = k/m$, tomando el valor $\epsilon = 1/10$.

3. Modos normales de vibración así como la expresión que relaciona las coordenadas normales con las coordenadas geométricas inicialmente consideradas.

4. La acción del viento se puede suponer como una fuerza horizontal armónica $f(t) = b \operatorname{sen} \Omega t$. Obtener la solución para las amplitudes modales (coordenadas normales) en el régimen permanente (suponiendo un pequeño amortiguamiento inevitable). Particularizar para el caso concreto $\Omega = \omega_0$ y discutir la diferencia entre la respuesta de la torre con y sin el oscilador armónico instalado.

⋆

1.— Emplearemos como coordenadas las elongaciones de cada uno de los resortes respecto de su posición natural: x para el resorte K e y para el k. Las ecuaciones pueden obtenerse a partir de la Lagrangiana o directamente mediante la segunda ley de Newton. Suponiendo vibraciones libres (sin fuerzas externas aplicadas) resultan:

$$M\ddot{x} + m(\ddot{x} + \ddot{y}) + Kx = 0;$$
$$m\ddot{x} + m\ddot{y} + ky = 0 \ .$$

En el caso de considerar la fuerza del viento serían

$$M\ddot{x} + m(\ddot{x} + \ddot{y}) + Kx = f(t);$$
$$m\ddot{x} + m\ddot{y} + ky = 0 \ .$$

Las ecuaciones se pueden escribir en forma matricial, definiendo las matrices de masa y rigidez:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}\}; \qquad (1)$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} M+m & m \\ m & m \end{pmatrix}, \qquad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

2.— Sustituyendo $K = M\omega_0^2$, $k = m\omega_0^2$, $m = \epsilon M$ las matrices de masa y rigidez resultan

$$[\mathbf{M}] = M\begin{pmatrix} 1+\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}, \qquad [\mathbf{K}] = M\omega_0^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}.$$

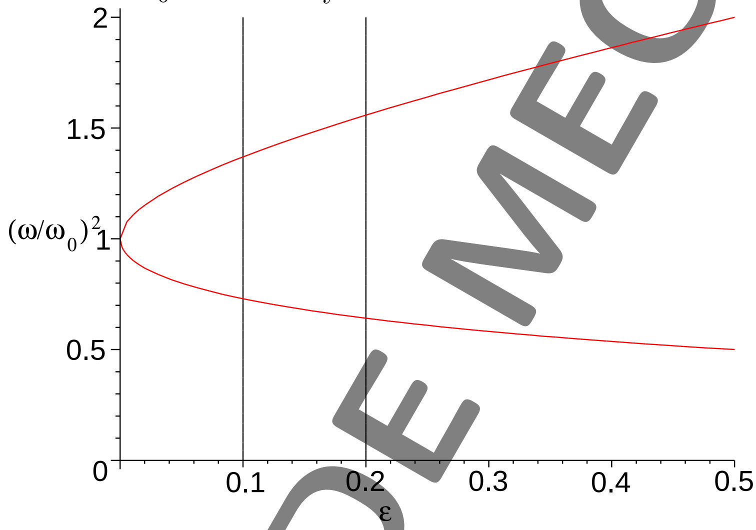
Las frecuencias propias (autovalores) se obtienen como raíces de la ecuación característica,

$$\det([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]) = M^2\left[\epsilon\omega^4 - (2+\epsilon)\epsilon\omega_0^2\omega^2 + \epsilon\omega_0^4\right] = 0$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2\left[(1+\epsilon/2) \pm \sqrt{(1+\epsilon/2)^2 - 1}\right];$$

sustituyendo el valor numérico $\epsilon = 0{,}1$ resulta

$$\omega_1^2 = 1{,}3702\omega_0^2,\ \omega_2^2 = 0{,}72984\omega_0^2; \quad \text{o bien} \quad \omega_1 = 1{,}1705\omega_0,\ \omega_2 = 0{,}8543\omega_0\ . \tag{2}$$

En la figura siguiente se muestra el valor de las frecuencias propias $(\omega/\omega_0)^2$, mostrándose que se apartan tanto más de ω_0 cuanto mayor es ϵ. Las líneas verticales marcan $\epsilon = 0{,}1,\ 0{,}2$.



3.— El modo normal de vibración $\{\mathbf{a}\}_k$ asociado a cada frecuencia ω_k se obtiene mediante

$$([\mathbf{K}] - \omega_k^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}\}_k = \{\mathbf{0}\};$$

particularizando para cada una de las frecuencias propias anteriores,

$$M{\omega_0}^2\begin{pmatrix} -0{,}5072 & -0{,}13702 \\ -0{,}13702 & -0{,}03702 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{a}\}_1 = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3{,}7016 \end{Bmatrix}$$
$$M{\omega_0}^2\begin{pmatrix} 0{,}19715 & -0{,}072985 \\ -0{,}072985 & 0{,}027015 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{a}\}_2 = \begin{Bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2{,}7016 \end{Bmatrix}$$

Como se sabe, los modos de vibración (o autovalores) están definidos a falta de una constante multiplicativa, por lo que se puede asignar un valor arbitrario a una componente no nula. Por ello se ha considerado en ambos casos la primera componente unidad. Las coordenadas normales $(u_1(t), u_2(t))$ son las amplitudes, variables en el tiempo, de los modos de vibración, por lo que

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = u_1(t)\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} + u_2(t)\begin{Bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3{,}7016 & 2{,}7016 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \tag{3}$$

La matriz que relaciona ambas coordenadas es la traspuesta de la denominada *matriz modal*:

$$[\mathbf{A}]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3{,}7016 & 2{,}7016 \end{pmatrix}$$

4.— Cambiando a coordenadas normales en (1) mediante la relación (3), y premultiplicando por la matriz modal $[\mathbf{A}]$,

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{f}\}; \tag{4}$$

considerando la ortogonalidad de los modos de vibración, resulta

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}7299M & 0 \\ 0 & 2{,}3702M \end{pmatrix} ,$$

$$[\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} M_1\omega_1^2 & 0 \\ 0 & M_2\omega_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3702M_1\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0{,}72984M_2\omega_0^2 \end{pmatrix} ,$$

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{f}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} b \operatorname{sen} \Omega t \ ,$$

por lo que se obtienen dos ecuaciones desacopladas

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = \frac{1}{M_1} b \operatorname{sen} \Omega t;$$

$$\ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = \frac{1}{M_2} b \operatorname{sen} \Omega t.$$

La solución en régimen permanente de estas ecuaciones es

$$u_1(t) = \frac{b/M_1}{\omega_1^2 - \Omega^2} \operatorname{sen} \Omega t = 1{,}5617 \frac{b}{M\omega_0^2}; \quad u_2(t) = \frac{b/M_2}{\omega_2^2 - \Omega^2} \operatorname{sen} \Omega t = -1{,}5617 \frac{b}{M\omega_0^2} \ .$$

Como se comprueba, para la frecuencia de excitación ω_0 ambos modos tienen oscilaciones exactamente opuestas. De esta forma, la amplitud $x(t)$ del movimiento de la torre será

$$x(t) = 1 \cdot 1{,}5617 \frac{b}{M\omega_0^2} + 1 \cdot (-1{,}5617) \frac{b}{M\omega_0^2} = 0 \ ,$$

lo que se denomina *antiresonancia*, al anularse completamente el movimiento. Para el otro grado de libertad, la amplitud del oscilador auxiliar $y(t)$, resulta

$$y(t) = -3{,}7016 \cdot 1{,}5617 \frac{b}{M\omega_0^2} + 2{,}7016 \cdot (-1{,}5617) \frac{b}{M\omega_0^2} = -10 \frac{b}{M\omega_0^2} = -\frac{b}{k} \ .$$

Observamos pues que el sistema funciona como si la carga $b \operatorname{sen} \Omega t$ se transmitiese íntegramente, de forma estática, al oscilador auxiliar.

En la siguiente figura se muestra la amplitud de oscilación de la torre, normalizada dividiendo por la amplitud estática b/K, como función de $\beta = \Omega/\omega_0$, para tres valores distintos $\epsilon = 0,\ 0{,}1,\ 0{,}2$.